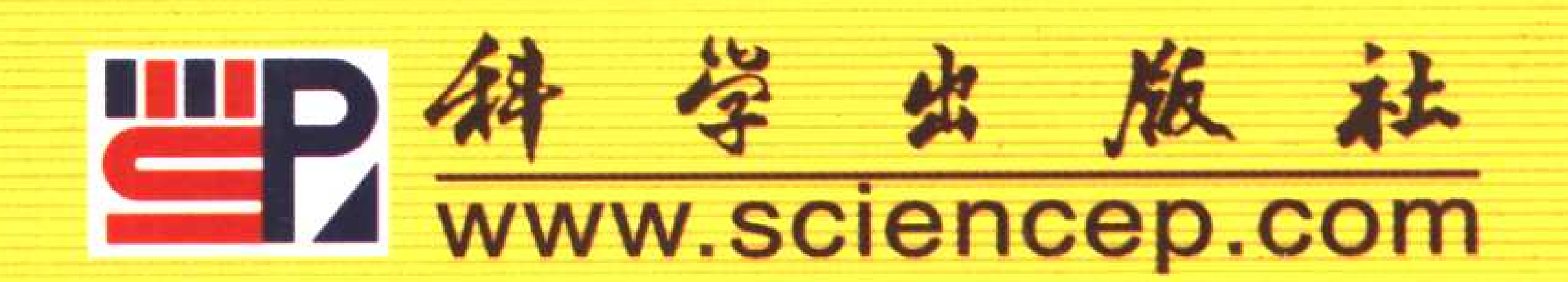
现代数学基础丛书 112

戴维-斯特瓦尔松方程

戴正德　蒋慕蓉　李栋龙　著



(O-2763.0101)


ISBN 978-7-03-019045-1

销售分类建议：高等数学

定 价：36.00 元

内 容 简 介

本书是关于耦合非线性偏微分方程 Davey-Stewartson (DS) 方程的一本专门著作。全书共分 5 章，主要介绍 DS 方程的物理背景；不同类型 DS 方程的初值问题；多种形式的孤立子解；同宿、异宿解；吸引子及结构探索。本书总结了 DS 方程的主要研究成果，特别是近年来我国科学工作者的成果。本书既注重理论，又侧重于方法和技巧的总结。

本书适合于数学、物理、力学等有关专业人员及高等学校有关教师、高年级学生及研究生阅读。

图书在版编目(CIP)数据

戴维-斯特瓦尔松方程/戴正德，蒋慕蓉，李栋龙 著. —北京：科学出版社，2007

(现代数学基础丛书；112)

ISBN 978-7-03-019045-1

I. 戴… II. ①戴… ②蒋… ③李… III. 微分方程 IV. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 078926 号

责任编辑：张 扬 杨 然 / 责任校对：陈玉凤

责任印制：赵德静 / 封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2007 年 6 月第一次印刷 印张：14 1/4

印数：1—3 000 字数：263 000

定价：36.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈明辉〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003年8月

前 言

20 世纪 70 年代中期, A. Davey 和 K. Stewartson 研究描述有限深水中波数为 k 的三维曲面波包的发展模型, 导出一类耦合方程, 称之为戴维 - 斯特瓦尔松 (Davey-Stewartson) 方程, 之后, Davey, Stewartson 和 Hocking 在研究平面 Poiseuille 流的三维扰动的非线性发展时导出了同一模型；1977 年, 考虑到水波表面的曲面张力效应, Djordjevic 和 Redekopp 进一步改进和完善了上述模型. 与此同时, Ablowitz, Haberman, Morris 和 Cornille 在研究将非线性 Schrödinger 方程推广到二维空间的完全可积系统时独立地推导出特殊的 Davey-Stewartson 方程.

Davey-Stewartson (简称 DS) 方程是由复振幅变量和实平均速度势变量耦合的 (1+2) 维非线性偏微分方程组. 由于曲面张力效应的不同, 就空间变量的特征而言, DS 方程可分为椭圆 - 双曲型 (DSI)、双曲 - 椭圆型 (DSII)、椭圆 - 椭圆型和双曲 - 双曲型等四类. 基于此, DS 方程既具有一般二阶耦合组的共同特征, 同时又具有特殊复杂性, 因此从模型建立以来, 引起了很多数学物理学家的关注. 40 多年来, 在方程初始问题解的适定性、解的爆破、孤立子解、周期孤立子解及其共振、envelope-hole 解、dromions 解、solitoff 解、双周期解、同宿筒解、异宿筒解以及扰动 DS 方程解在无穷维空间的性态等方面展开了深入的研究, 取得了丰富的研究成果, 出现了许多求解问题的新思想、新方法和新技巧, 探寻了 DS 方程所特有的解的复杂结构, 揭示了该方程所描述的物理现象的复杂性. 其中, 一些结果是我国的科学工作者包括院士、数学物理研究人员、年轻的博士和作者的原创性成果.

本书旨在比较系统地总结 40 余年来 DS 方程的研究成果, 特别是近年来的成果, 介绍在求解孤立子、同宿、异宿筒解以及显示解中创造和发展起来的若干种新方法、新技巧, 展示近年来在近可积系统研究中国内学者在 DS 方程研究方面的最新成果, 其中, 一些结果是作者承担的两项国家自然科学基金课题的成果. 本书在撰写过程中得到国内外学者的支持和帮助, 云南大学、香港中文大学数学科学研究所以及广西工学院为作者提供了良好的研究环境, 科学出版社张扬先生付出了艰辛的劳动, 我们在此一并表示诚挚的谢意. 由于作者的能力和水平所限, 一些重要的成果可能未能述及, 书中也可能有不妥之处, 敬请读者见谅和指正.

本书得到国家自然科学基金 (项目编号：10361007) 的资助.

作 者

2007 年 3 月

目　录

第 1 章　戴维 - 斯特瓦尔松方程的物理背景

戴维 - 斯特瓦尔松 (Davey-Stewartson) 方程 (简称 DS 方程) 是流体力学中的一类重要的偏微分方程组, 它有着丰富的物理背景和内涵, 有限深度水面上波数为 k 的三维波包的发展 (Davey A. 和 Stewartson K.　1974)、有限深度水面上二维表面张力 - 引力波包的位移 (Eagles P.M.　1971)、平面 Poiseuille 流三维扰动的非线性发展 (Davey A. 等　1974) 等都可导出 DS 方程. DS 方程于 20 世纪 70 年代由 Davey, Stewartson, Hocking 等推导. 1976 年, Djordjevic V.D. 和 Redekopp L.G.(1977) 在研究有限深度水面上二维表面张力 - 引力波包的位移时也导出了这类方程, 并且作了完善. 本章我们从上述三个不同的物理背景推导方程.

1.1　三维曲面波包

本节我们用多重尺度法得到描述有限深度水中波数为 k 的三维波包发展的 DS 方程.

首先我们选择固定的笛卡儿坐标系 $OXYZ$, 其中原点在未扰动的自由曲面上, OZ 垂直向上使得水的底面由 $z=-h$ 所定义, 并且平面 OXY 与未扰动的自由曲面重合. 我们设在时间 $t=0$ 时有一确定的前进波使得自由曲面的高度提升到 $z=\zeta$, 其中

$$g\zeta|_{t=0} = \mathrm{i}\epsilon w a(\epsilon x, \epsilon y)\exp\{\mathrm{i}kx\} + \mathrm{c.c}, \tag{1.1.1}$$

式中, g 是重力加速度; k 和 w 分别表示此前进波的波数和频率; a 是 $\epsilon x, \epsilon y$ 的函数; ϵ 是小的正常数; c.c 表示复共轭. 在物理中, 这种形式对应于一波长为 $2\pi/k$ 沿 x 正方向的前进波并且随着位置的改变振幅缓慢地变化, 而且与它的高度成反比例. k 和 w 之间的色散关系是

$$w = (gk\sigma)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.2}$$

其中, $\sigma = \tanh kh$. 随后, 用 t 来度量时间, $\phi(x,y,z,t)$ 表示速度势, 使得

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0, \qquad -h < z < \zeta, \tag{1.1.3}$$

对应的在 $z=-h$ 上边界条件是

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0, \tag{1.1.4}$$

在 $z=\zeta$ 上边界条件是

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y} \tag{1.1.5a}$$

和

$$2g\zeta+2\frac{\partial\phi}{\partial t}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2=0. \tag{1.1.5b}$$

由于在前进波施加扰动, 我们可以寻找如下形式的解:

$$\phi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\phi_nE^n,\qquad \zeta=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\zeta_nE^n, \tag{1.1.6}$$

其中

$$E=\exp\{\mathrm{i}(kx-\omega t)\},\qquad \phi_{-n}=\tilde{\phi_n},\qquad \zeta_{-n}=\tilde{\zeta_n}, \tag{1.1.7}$$

$\tilde{\phi}$ 表示 ϕ 复共轭, 此外, 我们将 ϕ_n,ζ_n 表示为

$$\phi_n=\sum_{j=n}^{\infty}\epsilon^j\phi_{nj},\qquad \zeta_n=\sum_{j=n}^{\infty}\epsilon^j\zeta_{nj},\qquad n\geqslant 0, \tag{1.1.8}$$

其中, ϕ_{nj} 仅是 ξ,η,z,τ 的函数, ζ_{nj} 仅是 ξ,η,τ 的函数, 并且 $\phi_{00}=\eta_{00}=0$, 这里

$$\xi=\epsilon(x-c_gt),\qquad \eta=\epsilon y,\qquad \tau=\epsilon^2t, \tag{1.1.9}$$

c_g 是初始前进波的群速度使得

$$c_g=\omega'(k)=(g/2\omega)\{\sigma+kh(1-\sigma^2)\}, \tag{1.1.10}$$

我们将 ϕ 的展开式 (1.1.6), 式 (1.1.8) 代入式 (1.1.3), 利用多重尺度法得到函数 ϕ_{nj} 的一个常微分方程序列. 特别地, 在边界条件 (1.1.4) 满足时有

$$\begin{cases}\phi_{11}=A\dfrac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh},\qquad \phi_{22}=F\dfrac{\cosh 2k(z+h)}{\cosh 2kh},\\[2ex] \phi_{12}=D\dfrac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}-\mathrm{i}\dfrac{\partial A}{\partial\xi}\left\{\dfrac{(z+h)\sinh k(z+h)-h\sigma\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\right\}.\end{cases} \tag{1.1.11}$$

其中, A,D,F 仅是 ξ,η,τ 的函数, 由于 ϕ_{0j} 方程解的性质强依赖于 ϵkh 的取值, 这里我们仅注意 $\epsilon kh\ll 1$ 的情形 (波触及底部), 推出 ϕ_{01},ϕ_{02} 与 z 无关而

$$\frac{\partial\phi_{03}}{\partial z}=-(z+h)\left\{\frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\eta^2}\right\}. \tag{1.1.12}$$

下一步我们将式 (1.1.6)~ 式 (1.1.8) 代入边界条件 (1.1.5a), (1.1.5b), 利用多重尺度法, 令 $\epsilon^j E^n (j=1,2,3;\ n=0,1,2)$ 的系数都等于零, 得到

$$\epsilon E^0;\quad \zeta_{01}=0, \tag{1.1.13a}$$

$$\epsilon E^1;\quad g\zeta_{11}=\mathrm{i}\omega A, \tag{1.1.13b}$$

$$\epsilon^2 E^0;\quad g\zeta_{02}=c_g\frac{\partial\phi_{01}}{\partial\xi}-k^2(1-\sigma^2)|A|^2, \tag{1.1.13c}$$

$$\epsilon^2 E^1;\quad g\zeta_{12}=\mathrm{i}\omega D+c_g\frac{\partial A}{\partial\xi}, \tag{1.1.13d}$$

$$\epsilon^2 E^2;\quad g\zeta_{22}=k^2A^2\left(\frac{\sigma^2-3}{2\sigma^2}\right),\qquad \omega F=3\mathrm{i}k^2A^2\left(\frac{1-\sigma^4}{4\sigma^2}\right). \tag{1.1.13e}$$

当我们考虑式 (1.1.5a) 中 ϵ^3E^0 的系数时, 除了要考虑来自 $\partial\zeta_{02}/\partial\xi, \partial\zeta/\partial t$ 的影响还要考虑在式 (1.1.12) 中非零项 $\partial\phi_{03}/\partial z$ 的影响, 利用式 (1.1.13c) 消去 ζ_{02} 后, 我们推出

$$(gh-c_g^2)\frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\xi^2}+gh\frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\eta^2}=-k^2\{2c_p+c_g(1-\sigma^2)\}\frac{\partial|A|^2}{\partial\xi} \tag{1.1.14}$$

和我们不需要的关于 ϕ_{03} 的方程. 在式 (1.1.14) 中 $c_p=\omega/k$, 它表示初始前进波的相速度. 在式 (1.1.5a), 式 (1.1.5b) 中 ϵ^3E^1 项的系数相等导致在 $z=0$ 上有关于 ϕ_{13},ζ_{13} 的两个代数方程, 如果从这两个方程中消去 ϕ_{13} 或 ζ_{13} 当且仅当下式成立时, 它们相容

$$\begin{aligned}&2\mathrm{i}\omega\frac{\partial A}{\partial\tau}-\{c_g^2-gh(1-\sigma^2)(1-kh\sigma)\}\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}+c_pc_g\frac{\partial^2A}{\partial\eta^2}\\&=\frac{1}{2}k^4\{9\sigma^{-2}-12+13\sigma^2-2\sigma^4\}|A|^2A+k^2\{2c_p+c_g(1-\sigma^2)\}A\frac{\partial\phi_{01}}{\partial\xi}.\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

方程 (1.1.14) 和 (1.1.15) 一起描述了对于 ϵ 一阶项前进波的发展, 对于 A, 适当的初始条件是

$$A(\xi,\eta,0)=a(\xi,\eta). \tag{1.1.16}$$

由物理背景, 一个合理的边界条件是对于任何固定的 τ, 波在远离它的中心时会完全消失, 因此当 $\xi^2+\eta^2\to\infty$ 时

$$|A|\to 0,\qquad \mathrm{grad}\phi_{01}\to 0. \tag{1.1.17}$$

在深水中 $\lim kh\to\infty, \sigma\to 1$ (但是保持 $\epsilon kh\ll 1$), 方程 (1.1.14), (1.1.15) 简化为 $\mathrm{grad}\phi_{01}=0$ 和

$$2\mathrm{i}\omega\frac{\partial A}{\partial\tau}-\frac{g}{4k}\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}+\frac{g}{2k}\frac{\partial^2A}{\partial\eta^2}=ak^4|A|^2A. \tag{1.1.18}$$

在浅水中, $\lim kh \to 0, c_g \to c_p$, 方程 (1.1.14), (1.1.15) 简化为

$$k^2h^2\frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\eta^2}=-\frac{3k^2}{g^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial|A|^2}{\partial\xi}, \tag{1.1.19}$$

$$\frac{2\mathrm{i}k}{g^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial A}{\partial\tau}-k^2h^2\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2A}{\partial\eta^2}=\frac{9k^2}{2gh^3}|A|^2A+\frac{3k^2}{g^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}}A\frac{\partial\phi_{01}}{\partial\xi}. \tag{1.1.20}$$

现在我们以另一种方式表示式 (1.1.14) 和式 (1.1.15). 当 $t>0$ 时, 自由曲面的高度可以由下式给出:

$$g\zeta=\mathrm{i}\epsilon\omega A\exp\{\mathrm{i}(kx-\omega t)\}+\mathrm{c.c}+O(\epsilon^2), \tag{1.1.21}$$

其中, c.c 表示复共轭, 作为前进波传递的结果, 除了具有式 (1.1.21) 特征的变化更快以外, 自由曲面的局部高度变化缓慢. 记这个长期变化是

$$\epsilon^2\left[\frac{k^2}{g}Q(\xi,\eta,\tau)-\frac{k\{\sigma+2kh(1-\sigma^2)\}}{gh-c_g^2}|A|^2\right], \tag{1.1.22}$$

附带地, 我们注意到它又等于 $\epsilon^2\zeta_{02}$, 然后我们得到式 (1.1.14) 和式 (1.1.15) 的等价形式如下:

$$\mathrm{i}\frac{\partial A}{\partial\tau}+\lambda\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}+\mu\frac{\partial^2A}{\partial\eta^2}=\nu|A|^2A+\nu_1AQ, \tag{1.1.23a}$$

$$\lambda_1\frac{\partial^2Q}{\partial\xi^2}+\mu_1\frac{\partial^2Q}{\partial\eta^2}=k_1\frac{\partial^2|A|^2}{\partial\eta^2}, \tag{1.1.23b}$$

其中,

$$\lambda=\frac{1}{2}\omega''(k)\leqslant 0,\qquad \mu=\frac{\omega'(k)}{2k}\equiv\frac{c_g}{2k}\geqslant 0,$$

$$\nu=\frac{k^4}{4\omega\sigma^2}\left\{9-10\sigma^2+9\sigma^4-\frac{2\sigma^2}{gh-c_g^2}\left[4c_p^2+4c_pc_g(1-\sigma^2)+gh(1-\sigma^2)\right]\right\},$$

$$\nu_1=\frac{k^4}{c_g}\{2c_p+c_g(1-\sigma^2)\},\quad \lambda_1=gh-c_g^2\geqslant 0,\quad \mu_1=gh,$$

$$k_1=ghc_g\left\{\frac{2c_p+c_g(1-\sigma^2)}{gh-c_g^2}\right\}.$$

式 (1.1.23a), 式 (1.1.23b) 正是 DS 方程.

1.2 二维表面张力 - 引力波包

本节我们研究有限深水面上二维表面张力 - 引力波包的运动方程, 波包的发展由两个偏微分方程所描述: 一个是带有外力项的非线性 Schrödinger 方程, 另一个是线性方程, 它是椭圆型或者双曲型取决于表面张力 - 引力波包的群速度是否小于或者大于长引力波的速度. 我们考虑不变深度 h 的液体的自由曲面上运动的一前向

表面张力 - 引力波的发展, 未扰动的自由曲面对应于平面 $z=0$, 其中 z 垂直向上, 底部在 $z=-h$. 未扰动的自由曲面其余的平面坐标 x,y, 我们选择 x 指向波的传播方向. 由于液体的运动是无旋的, 速度位势 $\phi(x,y,z,t)$ 满足 Laplace 方程

$$\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz}=0, \qquad -h<z<\zeta, \tag{1.2.1}$$

其中, $\zeta(x,y,t)$ 表示起伏的自由曲面的位置. 其边界条件：在 $z=-h$ 上,

$$\phi_z=0, \tag{1.2.2a}$$

在 $z=\zeta$ 上,

$$\phi_z=\zeta_t+\phi_x\zeta_x+\phi_y\zeta_y \tag{1.2.2b}$$

和

$$g\zeta+\phi_t+\frac{1}{2}(\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2)=T\frac{\zeta_{xx}(1+\zeta_y^2)+\zeta_{yy}(1+\zeta_x^2)-2\zeta_{xy}\zeta_x\zeta_y}{(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{1.2.2c}$$

参数 T 是曲面张力系数与流体密度的比值, g 是重力加速度. 我们设初始曲面 (在 $t=0$) 有如下变形：

$$\zeta(x,y,t=0)=\epsilon\frac{\mathrm{i}\omega}{g(1+\tilde{T})}\{A(\epsilon x,\epsilon y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-A^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\}, \tag{1.2.3}$$

其中, $\tilde{T}=k^2T/g$, $*$ 表示复共轭; ϵ 是度量波长 $2\pi/k$ 的波动曲面斜率的非维度参数. 曲面形变的包络 $A(\epsilon x,\epsilon y)$ 容许具有一慢空间变量并且频率 ω 唯一地由 k 的值和下面色散关系式确定：

$$\omega=\{gk\sigma(1+\tilde{T})\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.2.4}$$

其中 $\sigma=\tanh kh$. 现在我们推导当运动仅是弱非线性时描述 A 的时间发展的方程 $(0<\epsilon\ll 1)$, 我们设式 (1.2.1), 式 (1.2.2) 有如下形式的解：

$$\phi=\epsilon\phi^{(1)}+\epsilon^2\phi^{(2)}+\epsilon^3\phi^{(3)}+\cdots, \tag{1.2.5a}$$

$$\zeta=\epsilon\zeta^{(1)}+\epsilon^2\zeta^{(2)}+\epsilon^3\zeta^{(3)}+\cdots, \tag{1.2.5b}$$

引进多重尺度：

$$\xi=\epsilon(x-c_gt),\eta=\epsilon y,\tau=\epsilon^2t,\xi_1=\epsilon^2(x-c_gt),\cdots, \tag{1.2.6}$$

c_g 表示群速度, 由下式给出：

$$c_g=\frac{\partial\omega}{\partial k}=c_p\left\{\frac{\sigma+kh(1-\sigma^2)}{2\sigma}+\frac{\tilde{T}}{1+\tilde{T}}\right\}, \qquad c_p=\frac{\omega}{k}. \tag{1.2.7}$$

将这些形式带入控制方程集, 反复利用在 $x, y, z, t, \xi, \eta, \tau$ 固定时 $\epsilon \to 0$ 的极限过程, 依次解出这些方程, 并且利用记号:

$$E \equiv \exp\{\mathrm{i}(kx - \omega t)\}, \tag{1.2.8}$$

我们得到下面的结果:

$$\phi^{(1)} = \Phi^{(1,0)}(\xi, \eta, \tau) + \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\{A(\xi, \eta, \tau)E + A^* E^{-1}\}, \tag{1.2.9a}$$

$$g\zeta^{(1)} = 0 + \frac{\mathrm{i}\omega}{1+\tilde{T}}\{AE - A^* E^{-1}\}, \tag{1.2.9b}$$

$$\begin{aligned}\phi^{(2)} = {} & \Phi^{(2,0)}(\xi, \eta, \tau) + \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\{D(\xi, \eta, \tau)E + D^* E^{-1}\} \\ & -\mathrm{i}\frac{(z+h)\sinh k(z+h) - h\sigma\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\{A_\xi E - A_\xi^* E^{-1}\} \\ & + \frac{3\mathrm{i}k^2\cosh 2k(z+h)}{4\cosh 2kh}\left[\frac{(1+\sigma^2)\{1-\sigma^2+\tilde{T}(3-\sigma^2)\}}{\sigma^2 - \tilde{T}(3-\sigma^2)}\right]\{A^2E^2 - A^{*2}E^{-2}\},\end{aligned} \tag{1.2.10a}$$

$$\begin{aligned}g\zeta^{(2)} = {} & c_g\Phi_\xi^{(1,0)} - k^2(1-\sigma^2)|A|^2 + \frac{\mathrm{i}\omega}{1+\tilde{T}}\{DE - D^*E^{-1}\} \\ & + \frac{c_p}{1+\tilde{T}}\left[\frac{c_g}{c_p} - \frac{2\tilde{T}}{1+\tilde{T}}\{A_\xi E + A_\xi^* E^{-1}\} - \frac{k^2}{2}\frac{3-\sigma^2}{\sigma^2 - \tilde{T}(3-\sigma^2)}\right]\{A^2E^2 + A^{*2}E^{-2}\}.\end{aligned} \tag{1.2.10b}$$

在式 (1.2.10) 中第二谐波项当 $\tilde{T} = \sigma^2/(3-\sigma^2)$ (对于深水: $\sigma = 1$ 推出 $\tilde{T} = \frac{1}{2}$) 时有奇性. 满足此条件的波数具有通常称为 "第二谐共振" 的现象, 在这个波数, 解析性被破坏而需要一个新的尺度. 假设波数 k 不太接近于 $\tilde{T} = \sigma^2/(3-\sigma^2)$, 我们可以继续做下去, 得到

$$\begin{aligned}\phi^{(3)} = {} & -\frac{1}{2}(z+h)^2\{\Phi_{\xi\xi}^{(1,0)} + \Phi_{\eta\eta}^{(1,0)}\} + \Phi^{(3,0)}(\xi, \eta, \tau) \\ & + \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\{G(\xi, \eta, \tau)E + G^* E^{-1}\} \\ & + \frac{(z+h)\sinh k(z+h) - h\sigma\cosh k(z+h)}{2k\cosh kh} \\ & \times \{(2kh\sigma A_{\xi\xi} - A_{\eta\eta} - 2\mathrm{i}kD_\xi - 2\mathrm{i}kA_\xi)E + \mathrm{c.c}\} \\ & - \frac{[(z+h)^2 - h^2]\cosh k(z+h)}{2\cosh kh}\{A_{\xi\xi}E + A_{\xi\xi}^* E^{-1}\} + \text{高阶谐波项}.\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

然后利用边界条件 (1.2.2b), 我们得到首阶平均流或长波分量由如下方程所确定:

$$(gh-c_g^2)\Phi_{\xi\xi}^{(1,0)}+gh\Phi_{\eta\eta}^{(1,0)}=-k^2c_p\left[\frac{c_g}{c_p}(1-\sigma^2)+\frac{2\tilde{T}}{1+\tilde{T}}\right](|A|^2)_\xi. \tag{1.2.12}$$

这个方程表明由短波自相互作用产生了长波, 又与上面在式 (1.2.2b), 式 (1.2.2c) 中的第一谐波分量比较, 我们发现仅当 $A(\xi.\eta,\tau)$ 满足下面的发展方程时这两个方程才是相容的:

$$\begin{aligned}&2\mathrm{i}\omega A_\tau+\omega\omega''A_{\xi\xi}+c_pc_gA_{\eta\eta}\\&=2k^2c_p\left\{1+\frac{c_g}{2c_p}(1-\sigma^2)(1+\tilde{T})\right\}A\Phi_\xi^{(1,0)}\\&\quad+\frac{k^4}{2}\left\{\frac{(1-\sigma^2)(9-\sigma^2)+\tilde{T}(3-\sigma^2)(7-\sigma^2)}{\sigma^2-\tilde{T}(3-\sigma^2)}+8\sigma^2-2(1-\sigma^2)^2(1+\tilde{T})\right\}|A|^2A\\&\quad-\frac{3\sigma^2k^4\tilde{T}}{2(1+\tilde{T})}|A|^2A.\end{aligned} \tag{1.2.13}$$

假如我们引进变量 Q:

$$Q=\frac{c_g}{k^2}\Phi_\xi^{(1,0)}+\frac{c_g}{gh-c_g^2}\left\{\frac{2c_p}{1+\tilde{T}}+c_g(1-\sigma^2)\right\}|A|^2, \tag{1.2.14}$$

则方程 (1.2.12), (1.2.13) 可以简化为 DS 方程:

$$\mathrm{i}A_\tau+\lambda A_{\xi\xi}+\mu A_{\eta\eta}=\nu|A|^2A+\nu_1AQ, \tag{1.2.15}$$

$$(gh-c_g^2)Q_{\xi\xi}+ghQ_{\eta\eta}=k(|A|^2)_{\eta\eta}. \tag{1.2.16}$$

系数定义如下:

$$\left\{\begin{aligned}&\lambda=\frac{1}{2}\omega''(k),\quad \mu=\omega'(k)/2k=c_g/2k,\\&\nu=\frac{k^4}{4\omega}\left\{\frac{(1-\sigma^2)(9-\sigma^2)+\tilde{T}(3-\sigma^2)(7-\sigma^2)}{\sigma^2-\tilde{T}(3-\sigma^2)}+8\sigma^2-\frac{3\sigma^2\tilde{T}}{1+\tilde{T}}\right.\\&\qquad\left.-\frac{8c_g^2}{(gh-c_g^2)(1+\tilde{T})}\left[\left(\frac{c_p}{c_g}\right)^2+\frac{c_p}{c_g}(1-\sigma^2)(1+\tilde{T})+\frac{gh}{c_g^2}(1-\sigma^2)^2(1+\tilde{T})^2\right]\right\},\\&\nu_1=\frac{k^4}{\omega}\left[\frac{c_p}{c_g}+\frac{1}{2}(1-\sigma^2)(1+\tilde{T})\right],\\&k=ghc_g\frac{2c_p+c_g(1-\sigma^2)(1+\tilde{T})}{(gh-c_g^2)(1+\tilde{T})}.\end{aligned}\right. \tag{1.2.17}$$

当曲面张力为零时 ($\tilde{T}=0$) 其系数与前一节推出的 DS 方程的系数一致. 这里我们注意到关于 Q 的方程 (或等价地 $\Phi^{(1,0)}$ 的方程) 是椭圆或双曲型取决于 $c_g^2 \lessgtr gh$ (马赫数 $\alpha = 1-\left(\dfrac{c_g^2}{gh}\right) \gtrless 0$). 对于有限波长引力波, c_g 总是小于 $(gh)^{\frac{1}{2}}$, 因此, Q 满足 Poisson 方程. 曲面张力的影响会增大群速度以至于达到 c_g 可能超过长引力波的速度, 于是 Q 的方程是以

$$\eta = \pm\{(c_g^2/gh)-1\}^{\frac{1}{2}} + \text{const} \tag{1.2.18}$$

为特征的双曲型方程, 我们注意到 μ, ν_1 总是正的, 从而如果我们将戴维 - 斯特瓦尔松方程统一写为

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}A_t + \sigma A_{xx} + A_{yy} = |A|^2 A + A\phi, \\ &\phi_{xx} + m\phi_{yy} = -2(|A|^2)_{xx}, \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

其中, $\sigma = \pm 1, m = \pm 1$. 则方程按照 (δ, m) 的符号, 包含了以下四种情形:

(1) $(+,+)$: 椭圆 - 椭圆型;

(2) $(+,-)$: 椭圆 - 双曲型, 通常称为 DSI 方程;

(3) $(-,+)$: 双曲 - 椭圆型, 通常称为 DSII 方程;

(4) $(-,-)$: 双曲 - 双曲型.

1.3 平面 Poiseuille 流三维扰动的非线性发展

本节, 我们介绍 Davey, Hocking 和 Stewartson 的工作 (Davey A. 等 1974), 从平面 Poiseuille 流三维扰动的非线性发展推导 DS 方程. 设两个平面相距 $2h$, O 是距离中间的任意一点, $OXYZ$ 为笛卡儿坐标系, 其中 OZ 垂直于平面, OX 是非扰动流方向, hx, hy, hz 是平行于坐标轴的距离, U_0V 是流体速度, 其中 U_0 是非扰动流的最大速度, $V=(u,v,w)$, 于是不可压缩流动的控制方程可表示为

$$\nabla\cdot V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + (V\cdot\nabla)V = -\nabla P + R^{-1}\nabla^2 V, \tag{1.3.1}$$

其中, $R = U_0 h/v$ 是 Reynolds 数, v 是运动速度; P 是非维度压力, 对应的边界条件是: 在 $z=\pm 1$ 时

$$u = v = w = 0. \tag{1.3.2}$$

在非扰动流动情形, 有

$$u = 1 - z^2, \qquad v = w = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -2/R, \tag{1.3.3}$$

它是由一致压力梯度引起的全展开流. 我们假设, 即使流被扰动, 当 $x^2+y^2\to\infty$ 时式 (1.3.3) 也成立. 设 u,v,w 和 P 都由其稳态值施加小扰动, 由线性稳定性理论, 用 $f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(x-ct)+\mathrm{i}\beta y}$, 其中 α,β 是实数, 代入式 (1.3.1) 的线性化方程, 仅当 α,β,R 和 c 相关, 才有非平凡解. 对任何固定的 α,β,R, 虽然 c 有无穷多个值, 我们集中注意其虚部极大的 $c=c_r+\mathrm{i}c_i$, 它很可能导致不稳定性, 对这个 c, 存在 R 的临界值 R_c, 使得在 α,β 空间的点 $(\alpha_c,0)$, 对所有的 α,β, 如果 $R<R_c$, 有 $c_i<0$, 和如果 $R=R_c$, 则 $c_i=0$. 如果 $R>R_c$, 存在 α,β 空间的区域, 在此区域中有 $c_i\geqslant 0$. 设在临界点 $R=R_c,\alpha=\alpha_c,\beta=0$, 有 $c=c_{cr}$, 我们定义:

$$\epsilon=(R-R_c)d_{1r},\quad E=\exp\{\mathrm{i}\alpha_c(x-c_{cr}t)\},\quad \tau=\epsilon t,$$
$$\xi=\epsilon^{\frac{1}{2}}(x+\alpha_{1r}t),\qquad \eta=\epsilon^{\frac{1}{2}}y,\tag{1.3.4}$$

然后, 将 u 表示为

$$u=u_0(\xi,\eta,\tau,z;\epsilon)+Eu_1(\xi,\eta,\tau,z;\epsilon)+E^{-1}u_1^*+E^2u_2+E^{-2}u_2^*+\cdots,\tag{1.3.5}$$

其中, $*$ 表示复共轭. 对 v,w,P 作类似的展开, 再将 u_0,u_1,u_2,u_3 表示为

$$\begin{aligned}u_0&=1-z^2+\epsilon u_{02}(\xi,\eta,\tau,z)+\epsilon^{\frac{3}{2}}u_{03}+\cdots,\\ u_1&=\epsilon^{\frac{1}{2}}u_{11}(\xi,\eta,\tau,z)+\epsilon u_{12}(\xi,\eta,\tau,z)+\epsilon^{\frac{3}{2}}u_{13}+\cdots,\\ u_2&=\epsilon u_{22}(\xi,\eta,\tau,z)+\epsilon^{\frac{3}{2}}u_{23}+\cdots,\\ u_3&=\epsilon^{\frac{3}{2}}u_{33}+\cdots\end{aligned}\tag{1.3.6}$$

等, 除了 v_0,w_0 不含有 $1-z^2$, 对 v,w,P 做类似的展开, 而

$$P_0=-2R^{-1}x+c+\epsilon^{\frac{1}{2}}P_{01}+\epsilon P_{02}+\cdots,\tag{1.3.7}$$

将上述展式代入控制方程 (1.3.1), 并令 $\epsilon^{\frac{1}{2}n}E^m(n,m=0,1,2\cdots)$ 各项前的系数为零. 由 $\epsilon^{\frac{1}{2}}E$ 的系数为零, 有

$$u_{11}=A(\xi,\eta,\tau)D\psi_1(z),\qquad v_{11}=0,\qquad w_{11}=-\mathrm{i}\alpha_cA\psi_1(z),\tag{1.3.8}$$

其中, $D=\partial/\partial z$; 而 ψ_1 是归一化使得 $\psi(0)=1$ 的 Orr-Sommerfeld 方程的特征函数

$$\mathcal{L}\psi_1\equiv[(\mathrm{i}/\alpha_cR_c)(D^2-\alpha_c^2)^2+(1-z^2-c_{cr})(D^2-\alpha_c^2)+2]\psi_1=0,\tag{1.3.9}$$

现在, 由非线性稳定性定理我们需要确定振幅函数 A. 由 ϵE 的系数, 我们得到

$$u_{12}=-\mathrm{i}\frac{\partial A}{\partial\xi}D\psi_{10}+A_2D\psi_1,\qquad w_{12}=-\frac{\partial A}{\partial\xi}(\alpha_c\psi_{10}+\psi_1)-\mathrm{i}\alpha_cA_2\psi_1,\tag{1.3.10}$$

其中 $\psi_{10}(z)$ 满足

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\psi_{10} &= -\alpha_c^{-1}[(1-z^2+a_{1r}-4\mathrm{i}\alpha_c R_c^{-1})(D^2-\alpha_c^2)-2\alpha_c^2(1-z^2-c_{cr})+2]\psi_1\\ &\equiv -\alpha_c^{-1}\mu\psi_1.\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

A_2 是 ξ,η,τ 的另一个函数, 而 a_{1r} 是线性化扰动的复增长率 $-\mathrm{i}\alpha c$ 在临界点附近的展式

$$-\mathrm{i}\alpha c = -\mathrm{i}\alpha_c c_{cr} + \mathrm{i}a_{1r}(\alpha-\alpha_c) - a_2(\alpha-\alpha_c)^2 - b_2\beta^2 + (R-R_c)d_1 + \cdots \tag{1.3.12}$$

式 (1.3.11) 的满足边界条件 $\psi_{10}(\pm1) = D\psi_{10}(\pm1) = 0$ 解的存在性由 a_{1r} 的选择所保证, 由于延拓到三维扰动, 也存在速度的 y 分量, 由下式给出:

$$v_{12} = (\partial A/\partial\eta)\chi_1(z), \tag{1.3.13}$$

其中

$$\{D^2-\alpha_c^2-\mathrm{i}\alpha_c R_c(1-z^2-c_{cr})\}(\mathrm{i}\alpha_c\chi_1 - D\psi_1) + 2\mathrm{i}\alpha_c R_c z\psi_1 = 0, \tag{1.3.14}$$

而 $\chi_1(\pm1)=0$, 为确定 A 没有必要去计算 χ_1 的显式. 由 ϵE^2 的系数我们得到

$$u_{22} = A^2 D\psi_2, \qquad v_{22} = 0, \qquad w_{22} = -2\mathrm{i}\alpha_c A^2\psi_2, \tag{1.3.15}$$

其中 $\psi_2(z)$ 是 z 的函数.

$\epsilon^{\frac{1}{2}}E^0$ 的系数是

$$\partial P_{10}/\partial z = 0. \tag{1.3.16}$$

而由 ϵE^0 的系数我们得到

$$D^2 u_{02} - R_c\partial P_{01}/\partial\xi = \mathrm{i}\alpha_c R_c|A|^2 D\{\psi_1^* D\psi_1 - \psi_1 D\psi_1^*\}, \tag{1.3.17}$$

$$D^2 v_{02} - R_c\partial P_{01}/\partial\eta = 0. \tag{1.3.18}$$

由连续性方程, 有

$$Dw_{02} = 0, \tag{1.3.19}$$

又, 连续性方程中, $\epsilon^{\frac{3}{2}}E^0$ 的系数是

$$\partial u_{02}/\partial\xi + \partial v_{02}/\partial\eta + Dw_{03} = 0, \tag{1.3.20}$$

应用在 $z=\pm1$ 上边界条件: $w=0$, 我们得到

$$w_{02} = 0, \qquad \int_{-1}^{1}(\partial u_{02}/\partial\xi + \partial v_{02}/\partial\eta)\mathrm{d}z = 0, \tag{1.3.21}$$

由上述这些方程我们得到

$$u_{02} = -\frac{1}{2}(1-z^2)R_c\partial P_{01}/\partial\xi + |A|^2 S(z), \tag{1.3.22}$$

$$v_{02} = -\frac{1}{2}(1-z^2)R_c\partial P_{01}/\partial\eta, \tag{1.3.23}$$

其中

$$S(z) = \mathrm{i}\alpha_c R_c \int_1^z (\psi_1^* D\psi_1 - \psi_1 D\psi_1^*)\mathrm{d}z \tag{1.3.24}$$

$$\frac{\partial^2 P_{01}}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 P_{01}}{\partial\eta^2} = \frac{3}{R_c}\frac{\partial|A|^2}{\partial\xi}\int_0^1 S(z)\mathrm{d}z. \tag{1.3.25}$$

现在, 可以看出在二维和三维理论之间的差别, 当 A 和 P_{01} 都与 η 无关时, 压力梯度 $\partial P_{01}/\partial\xi$ 和速度分量 u_{02} 都平行于 $|A|^2$, 但是在三维理论中这种简化是不可能的. 为便于在二维和三维理论间比较, 我们记:

$$B(\xi,\eta,\tau) = |A|^2 - \frac{1}{3}R_c\left(\int_0^1 S(z)\mathrm{d}z\right)^{-1}\frac{\partial P_{01}}{\partial\xi}, \tag{1.3.26}$$

从而

$$u_{02} = |A|^2 DF(z) + \left(\frac{3}{2}\int_0^1 S(z)\mathrm{d}z\right)(1-z^2)B, \tag{1.3.27}$$

其中

$$DF(z) = S(z) - \frac{3}{2}(1-z^2)\int_0^1 S(z)\mathrm{d}z, \tag{1.3.28}$$

经过计算得到

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial\eta^2} = \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}|A|^2, \tag{1.3.29}$$

现在我们可以着手计算 $\epsilon^{\frac{3}{2}}E$ 的系数, 利用式 (1.3.13), 通过消去压力和函数 χ_1, 动量方程和连续性方程中的 x, z 分量可以被简化为 w_{13} 的单个方程

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}w_{13} = &\frac{\partial A}{\partial\tau}(D^2-\alpha_c^2)\psi_1 + \frac{\mathrm{i}\alpha_c A}{d_{1r}R_c}[(1-z^2-c_{cr})(D^2-\alpha_c^2)+2]\psi_1 + \frac{\partial A_2}{\partial\xi}\mu\psi_1 \\
&-\mathrm{i}\frac{\partial^2 A}{\partial\xi^2}\left(\mu\psi_{10}+\frac{1}{\alpha_c}\mu\psi_1\right) - \frac{\partial^2 A}{\partial\xi^2}[2R_c^{-1}(D^2-3\alpha_c^2)-\mathrm{i}\alpha_c(3-3z^2+2a_{12}-c_{cr})]\psi_1 \\
&-\frac{\partial^2 A}{\partial\eta^2}[2R_c^{-1}(D^2-\alpha_c^2)-\mathrm{i}\alpha_c(1-z^2-c_{cr})]\psi_1 - \mathrm{i}\alpha_c A|A|^2[D\psi_2(D^2-\alpha_c^2)\psi_1^* \\
&+2\psi_2(D^2-\alpha_c^2)D\psi_1^* - 2D\psi_1^*(D^2-4\alpha_c^2)\psi_2 \\
&-\psi_1^*(D^2-4\alpha_c^2)D\psi_2 - DF(D^2-\alpha_c^2)\psi_1 + \psi_1 D^3F]
\end{aligned}$$

$$+\mathrm{i}\alpha_c AB\left(\frac{3}{2}\int_0^1 S(z)\mathrm{d}z\right)[(1-z^2)(D^2-\alpha_c^2)+2]\psi_1 \tag{1.3.30}$$

由于算子 $\mathcal{L}$ 有一个在 $z=\pm1$ 上满足适当的边界条件的特征解 (由式 (1.3.2) 和连续性方程, 在边界 $z=\pm1$ 上 w_{13} 满足 $w_{13}(\pm1)=Dw_{13}(\pm1)=0$), 仅当式 (1.3.30) 的右边满足一定的积分条件, 它才可能有解, 最简单的方法是通过用 $\mathcal{L}$ 的伴随函数乘以式 (1.3.30), 再从 -1 到 1 积分, 我们得到

$$\frac{\partial A}{\partial\tau}-a_2\frac{\partial^2 A}{\partial\xi^2}-b_2\frac{\partial^2 A}{\partial\eta^2}=\frac{d_1}{d_{1r}}A+k|A|^2A+qAB, \tag{1.3.31}$$

其中, a_2,b_2,q,k 都是复常数. 结合式 (1.3.29) 和式 (1.3.31), 我们再次得到 DS 方程

$$\begin{gathered}\frac{\partial A}{\partial\tau}-a_2\frac{\partial^2 A}{\partial\xi^2}-b_2\frac{\partial^2 A}{\partial\eta^2}=\frac{d_1}{d_{1r}}A+k|A|^2A+qAB,\\ \frac{\partial^2 B}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial\eta^2}=\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}|A|^2.\end{gathered} \tag{1.3.32}$$

第 2 章　戴维 - 斯特瓦尔松方程的初值问题

本章研究 DS 方程的初值问题. 由于耦合的两个方程的特征有椭圆和双曲两种情况, 因此将分别就 $(+,+),(+,-),(-,+)$ 和 $(-,-)$ 型不同情形的初值问题展开讨论. 由于研究的技巧和所用的工具不一样, 我们安排本章内容如下：2.1 节, $(+,+),(-,+)$ 型的 Cauchy 问题；2.2 节, $(+,+),(-,+)$ 型在带权空间解的存在性；2.3 节, $(+,-),(-,-)$ 型 Cauchy 问题；2.4 节, 广义 DS 方程 $(+,+)$ 型 Cauchy 问题；2.5 节, $(+,-)$ 型 Cauchy 问题小初值弱解；2.6 节, 解的爆破与退化 DS 方程. 本章的主要内容见 J.M.Ghidaglia, J.C.Saut(1990); N, Hayashi, J.C.Saut(1995); F.Linares, G.Ponce(1993); M.Tsutsumi(1994); B. Guo, B. Wang(1999); Y.Li, B.Guo, M.Jiang(2000) 等.

2.1　$(+,+)$ 型和 $(-,+)$ 型 Cauchy 问题

我们考虑 DS 方程

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\delta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\chi\left|u\right|^2u+bu\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\&\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|u\right|^2\right),\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

其中, u 为 $(t;x,y)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^2$ 的复值函数; φ 为 $(t;x,y)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^2$ 的实值函数, δ,χ,b,m 是实参数

我们首先导出守恒律:

2.1.1　守恒律

考虑方程 (2.1.1) 的解 (u,φ) 及其在无穷远处的行为, 并假定这些函数是光滑的.

首先, 把式 $(2.1.1)_1$(即 (2.1.1) 的第一个方程) 乘以 $2\bar{u}$, 分别取所得结果的实部与虚部

$$(|u|^2)_t+2\mathrm{Im}\{\delta(u_x\bar{u})_x+(u_y\bar{u})_y\}=0,\tag{2.1.2a}$$

$$-2\mathrm{Im}(u_t\bar{u})+2\mathrm{Re}\{\delta u_{xx}\bar{u}+u_{yy}\bar{u}\}=\cosh\,\mathrm{i}|u|^4+2b|u|^2\varphi_x.\tag{2.1.2b}$$

其次, 把式 $(2.1.1)_1$ 乘以 $\bar{u}_x$, 得

$$\mathrm{i}u_t\bar{u}_x + \delta u_{xx}\bar{u}_x + u_{yy}\bar{u}_x = \chi|u|^2u\bar{u}_x + bu\bar{u}_x\varphi_x. \tag{2.1.3a}$$

同理, 将式 $(2.1.1)_1$ 乘以 $\bar{u}_y$, 得

$$\mathrm{i}u_t\bar{u}_y + \delta u_{xx}\bar{u}_y + u_{yy}\bar{u}_y = \chi\left|u\right|^2u\bar{u}_y + bu\bar{u}_y\varphi_x. \tag{2.1.3b}$$

最后, 由式 $(2.1.1)_1$ 与 $2\bar{u}_t$ 的乘积可得

$$2\mathrm{i}u_t\bar{u}_t + 2\delta u_{xx}\bar{u}_t + 2u_{yy}\bar{u}_t = 2\chi\left|u\right|^2u\bar{u}_t + 2bu\bar{u}_t\varphi_x,$$

其实部为

$$(\delta|u_x|^2 + |u_y|^2 + \chi|u|^4/2)_t + b(|u|^2)_t\varphi_x = 2\mathrm{Re}\{\delta(u_x\bar{u}_t)_x + (u_y\bar{u}_t)_y\}. \tag{2.1.4a}$$

再运用式 $(2.1.1)_2$ 可算得

$$(|u|^2)_t\varphi_x = \{(|u|^2)_t\varphi + (\varphi_{xt}\varphi)_x + m(\varphi_{yt}\varphi)_y\} - \{(\varphi_x^2 + m\varphi_y^2)/2\}_t. \tag{2.1.4b}$$

所以式 (2.1.4a)+b(2.1.4b), 得

$$\begin{aligned}&\{\delta|u_x|^2 + |u_y|^2 + (\chi|u|^4 + b(\varphi_x^2 + m\varphi_y^2))/2\}_t\\ =& \{2\mathrm{Re}(\delta_x\bar{u}_t)_x + b(|u|^2)_t\varphi + b\varphi_{xt}\varphi\}_x + \{2\mathrm{Re}(u_y\bar{u}_t) + bm\varphi_{yt}\varphi\}_y.\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

下面给出全局量 $(u = u(t), \varphi = \varphi(t))$:

$$M(u) = \int_{\mathbf{R}^2}|u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2.1.6}$$

$$J_x(u) = \int_{\mathbf{R}^2}(u\bar{u}_x - \bar{u}u_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2.1.7}$$

$$J_y(u) = \int_{\mathbf{R}^2}(u\bar{u}_y - \bar{u}u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2.1.8}$$

$$E(u) = \int_{\mathbf{R}^2}\{\delta|u_x|^2 + |u_y|^2 + [\chi|u|^4 + b(\varphi_x^2 + m\varphi_y^2)]/2\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.1.9}$$

根据式 (2.1.2a), 式 (2.1.3a), 式 (2.1.3b), 式 (2.1.5) 以及运动常数 M, J_x, J_y 和 E 可知被积函数的时间导数是完全可导的.

另一全局积分关系从 DS 方程组也可得到, 它是积分

$$I(t) = \int_{\mathbf{R}^2}(\delta x^2 + y^2)|u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2.1.10}$$

的发展律.

在一般的立方 Schrödinger 方程 (即 $\delta=\pm1$, $b=0$) 中可知 (Zhakarov, Shabat 1972), 若就 $\chi=-1$(2.1.10) 的时间发展的研究可导致对于确定的初值的聚焦 (或有限时间爆破) 的必然性. Ablowitz 和 Segur(1979) 已注意到, 对于任意的 δ, χ 以及 b, DS 方程组的解都满足

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}I\left(t\right)=8E\left(u\left(t\right)\right). \tag{2.1.11}$$

由于 $E\left(u\left(t\right)\right)=E\left(u_0\right)$, 则若存在 u_0 使得 $E\left(u_0\right)<0$, 即可根据方程 (2.1.10) 来推导出当 $\delta=\pm1$ 时的聚焦的必然性. 它是 Ablowitz 和 Segur(1979) 用过的结论. 我们给出由式 (2.1.1) 得到式 (2.1.11) 的推导过程.

首先, 式 (2.1.1) 乘以 δx^2+y^2, 然后将结果恒等式在 $\mathbf{R}^2$ 内求积分, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}^2}(\delta x^2+y^2)|u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}^2}(xu_x\bar{u}+yu_y\bar{u})\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.1.12}$$

对时间求微分得到

$$\frac{\mathrm{d}^2I\left(t\right)}{\mathrm{d}t^2}=4\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}^2}\left\{x\left(u_{xt}\bar{u}+u_x\bar{u}_t\right)+y\left(u_{yt}\bar{u}+u_y\bar{u}_t\right)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.1.13}$$

然后, 运用恒等式

$$\int_{\mathbf{R}^2}xu_{xt}\bar{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_{\mathbf{R}^2}(u\bar{u}_t+x\bar{u}_xu_t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

以及关于 $yu_{xt}\bar{u}$ 的相似关系, 得

$$\frac{\mathrm{d}^2I(t)}{\mathrm{d}t^2}=8\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}^2}\{xu_x\bar{u}_t+yu_y\bar{u}_t-\bar{u}u_t\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.1.14}$$

根据式 (2.1.2b), 式 (2.1.3a) 和式 (2.1.3b) 可证明右边积分等于 $E(t), E$ 由式 (2.1.9) 给出. 这就证明了式 (2.1.11).

2.1.2 椭圆 – 椭圆和双曲 – 椭圆型的 Cauchy 问题

本节研究在 $m>0$ 的条件下的方程 (2.1.1). 为把方程 (2.1.1) 转换为只含 u 的的方程 (见后面的式 (2.1.19)), 将通过类泊松方程 (2.1.1) 的解 u 来表示 φ. 令

$$\varphi_x=E(|u|^2), \tag{2.1.15}$$

其中, 奇异积分算子 $E=E_m$ 由 Fourier 变量

$$\widehat{E\left(f\right)}\left(\xi_1,\xi_2\right)=\frac{\xi_1^2}{\xi_1^2+m\xi_2^2}\hat{f}\left(\xi_1,\xi_2\right)=p_m\left(\xi\right)\hat{f}\left(\xi_1,\xi_2\right) \tag{2.1.16}$$

来定义.

由于 p_m 是 0 阶齐次的, 且 Calderon-Zygmund 定理 (Folland　1983) 蕴涵了 E 是 $L^p(\mathbf{R}^2)$(其中 $1 < p < \infty$) 中的一个有界算子, 所以可推断, 存在常数 $C = C_p > 0$ 使得

$$\|\varphi_x\|_{L^p(\mathbf{R}^2)} \leqslant C_p \|u\|_{L^{2p}(\mathbf{R}^2)}, \qquad 1 < p < \infty. \tag{2.1.17}$$

又由式 (2.1.15) 和式 (2.1.16), 有

$$\|\varphi_x\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \leqslant C_p \|u\|_{L^4(\mathbf{R}^2)}. \tag{2.1.18}$$

综上可把方程 (2.1.1) 约化为非局部的非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \delta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \chi|u|^2 u + buE(|u|^2), \qquad \delta = \pm 1. \tag{2.1.19}$$

对于方程 (2.1.19), 赋予初值

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y). \tag{2.1.20}$$

方程 (2.1.19) 的一般形式为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = F(u), \tag{2.1.21}$$

其中二阶算子 L 定义为

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbf{R}^n \tag{2.1.22}$$

且实常数 $a_{ij} = a_{ji}$, 则矩阵 (a_{ij}) 是可逆的, 这里需强调的是并没有假定 L 为椭圆的. 非线性算子 F 不一定是局部的.

定理 2.1.1 (存在性与唯一性)　(i) 令 $u_0 \in L^2(\mathbf{R}^2)$, 在 $[0, T^*)$, $T^* > 0$ 上存在式 (2.1.1) 的唯一最大解 (u, φ), 使得

$$\begin{aligned}
&u \in C([0, T^*); L^2(\mathbf{R}^2)) \cap L^4((0, t) \times \mathbf{R}^2) \\
&\nabla\varphi \in L^2((0, t) \times \mathbf{R}^2) \\
&u(0) = u_0, \qquad \|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2} \qquad 0 \leqslant t < T^*.
\end{aligned}$$

(ii) 若 $u_0 \in L^2(\mathbf{R}^2)$ 且 u_0 是充分小的, 那么 $T^* = \infty$, 解是全局解.

定理 2.1.2 (正则性)　(i) 若 $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^2)$, 则对于所有 $t \in [0, T^*), p \in [2, \infty]$ 和 $q \in [2, 4]$, 前面的解满足

$$\begin{aligned}
&u \in C([0, T^*); H^1(\mathbf{R}^2)) \cap C([0, T^*); H^{-1}(\mathbf{R}^2)), \\
&\nabla u \in L^4((0, t) \times \mathbf{R}^2), \quad \nabla\varphi \in C([0, T^*); L^p(\mathbf{R}^2)), \\
&\nabla^2\varphi \in L^4([0, t]; L^q(\mathbf{R}^2)),
\end{aligned}$$

且 $E(u(t))=E(0),\ 0\leqslant t<T^*$.

(ii) 若 $u_0\in H^2(\mathbf{R}^2)$, 则对于所有 $t\in[0,T^*)$, 有

$$u\in C([0,T^*);H^2(\mathbf{R}^2))\cap C^1([0,T^*);L^2(\mathbf{R}^2)),$$
$$\nabla\varphi\in C([0,T^*);H^2(\mathbf{R}^2)),$$

且

$$u\in L^2(0,t;H^{5/2}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2)),\quad \nabla^2\varphi\in L^1(0,t;H^{3/2}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2)),\quad \forall t\in[0,T^*).$$

定理 2.1.3 (连续依赖性) 映射 $u_0\to(u,\nabla\varphi)$ 由 $H^1(\mathbf{R}^2)$ 到 $C\ (I;H^1(\mathbf{R}^2))\times C(I;L^p(\mathbf{R}^2))$ 在下述意义下是连续的, 其中 $I=[0,T]$ 且 $p>2$. 即令 $u\in C(I;H^1(\mathbf{R}^2))$, $\nabla\varphi\in C(I;L^p(\mathbf{R}^2))$ 是方程 (2.1.1) 的解, 且令当 $n\to\infty$ 时, $u_{0n}\to u(0)\in H^1(\mathbf{R}^2)$, 那么对于 $u_n(0)=u_{0n}$ 对在 I 上存在的解 (u_n,φ_n) 只要 n 充分大, 在空间 $C(I;H^1(\mathbf{R}^2))\times C(I;L^p(\mathbf{R}^2))$ 中就有

$$(u_n,\nabla\varphi_n)\to(u,\varphi),\quad p>2.$$

注 1 当 $u_0\in H^1(\mathbf{R}^2)$ 时, 定义的能量 $E(u(t))$ 为守恒的. 在某一情况下, 即使对大的初值都允许有全局解, 即假设 $\delta=\pm1,\ m>0$(椭圆 - 椭圆型). 由式 $(2.1.1)_2$ 可得到

$$\int(\varphi_x^2+m\varphi_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int|u|^2\varphi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

结合此关系式、式 (2.1.18) 和 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\int(\varphi_x^2+m\varphi_y^2)\leqslant\int|u|^4\mathrm{d}x.$$

由能量表达式 (2.1.9) 可见

$$\chi\geqslant\max(-b,0)\tag{*}$$

的条件下质量或能量守恒都蕴涵了 u 的范数在 H^1 上是先验有界的: $\|u\|_{L^\infty(H^1)}\leqslant C(\|u_0\|_{H^1})$. 所以, 若 $\delta>0$ 且式 (*) 为真, 根据定理 2.1.2 所求得的解是全局解. 这一结果将为下面的定理 2.2.5 再次涵盖, 并且指出式 (*) 为最优的.

定理 2.1.1~ 定理 2.1.3 的证明如下.

首先, 把式 (2.1.19) 转化为其等价的积分方程. 为此, 引进 $S(t)$, 它是由线性 Schrödinger 方程生成的群.

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\delta\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0.\tag{2.1.23}$$

这个群在所有的空间 $H^s(\mathbf{R}^2), s\in\mathbf{R}$ 中是个酉群. 设

$$\wedge f(t)=\int_0^t S(t-s)f(s)\mathrm{d}s, \tag{2.1.24}$$

且把式 (2.1.19) 写为

$$u(t)=S(t)u_0-\mathrm{i}\wedge F(u(t)), \tag{2.1.25}$$

其中

$$F(v)=\chi|v|^2v+bvE(|v|^2). \tag{2.1.26}$$

注意到如果 $u\in L^\infty(0,T;L^2(\mathbf{R}^2))\bigcap L^4(0,T;L^4(\mathbf{R}^2))$, 则式 (2.1.25) 和式 (2.1.19) 是等价的. 实际上, 在 Kato(1987) 中 (他选用了一个稍微不同的空间), 有下面的结论:

$$\delta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F(u)\in L^\infty(0,T;L^{-2}(\mathbf{R}^2))+L^{4/3}(0,T;L^{4/3}(\mathbf{R}^2))$$

$$\subset L^{4/3}(0,T;H^{-2}(\mathbf{R}^2)).$$

如果 u 是式 (2.1.18) 的解, 有 $\partial u/\partial t\in L^{4/3}(0,T;H^{-2}(\mathbf{R}^2))$, 因此有

$$u\in L([0,T];H^{-2}(\mathbf{R}^2)).$$

这样 $u(0)=u_0\in H^{-2}$ 有意义. 实际上由于 $u\in L^\infty(0,T;L^2(\mathbf{R}^2)$, 则有 $u_0\in L^2(\mathbf{R}^2)$. 又因为 $S(t)$ 是空间上 $H^{-2}(\mathbf{R}^2)$ 的一连续酉群, 可得式 (2.1.25) (在 H^{-2} 中用同样的方法可以得到其逆证明).

证明的基本思想是在空间 (如 $L^4(0,T;L^4(\mathbf{R}^2))$) 中利用压缩性论证方法 (见 Kato (1987); Cazenave, Weissler (1988) 中用这种方法研究了古典的 Schrödinger 方程). 这种方法是建立在线性方程 (2.2.22) 的自由生成子的 L^p-L^q 估计基础上 (见本节最后的引理). 对通常的椭圆 Schrödinger 方程来说这是一种古典的方法, 这种方法很容易推广到与一般 (不一定是椭圆的) 算子 (2.1.21) 相关的生成子上面. 下面主要证明在 H^1 中的解存在性.

定理 2.1.1～ 定理 2.1.3 中所陈述的性质大多是 Schrödinger 方程背景下的古典性质. 我们简要地对非古典方程或 DS 系统中具有特殊特征的方程进行讨论.

定理 2.1.2 中的局部光滑效应类似于相应式 (2.1.22) 的一般线性 Schrödinger 方程的类似结果. 可以不考虑算子 L 的椭圆性. 利用式 (2.1.15) 的表达式和 Calderon-Zygmund 理论, 由 u 的正则性可以证明定理 2.1.1 和定理 2.1.2 中 φ 正则性. 下面我

们给出定理 2.1.2 中关于在 H^1 中局部解的存在性的证明. 对 $I=[0,T]$, 令

$$
\begin{aligned}
X &= X(T) = L^\infty(I;L^2)\cap L^4(I;L^4),\\
\bar{X} &= \bar{X}(T) = C(I;L^2)\cap L^4(I;L^4),\\
X' &= X'(T) = L^1(I;L^2)+L^{4/3}(I;L^{4/3}),\\
X_0 &= X_0(T) = L^\infty(I;L^2)\cap L^\infty(I;L^4)\subset X.
\end{aligned}
$$

其中, $L^p\equiv L^p(\mathbf{R}^2)$. 在这些空间中赋予范数. 利用符号

$$\|u\|_{p,q} = \|u\|_{L^p(I;L^q(\mathbf{R}^2))}.$$

引理 2.1.4 $\wedge F$ 是从 X_0 到 X 中连续有界映射. 若 T 充分小, 则在以 X_0 为中心的每一个球域 $R(X_0)$ 中, 映射 $\wedge F$ 是映到相应的 X 球域中的压缩映射 (其中空间 X, X_0 依赖于 T, 但当 T 变化时 R 保持不变).

证明 对应于 $\wedge(|u|^2u)$ 的局部部分 Kato(1987) 已经证明. 下面仅考虑 $uE(|u|^2)$ 在式 (2.1.25) 中的影响.

设 $\varphi_x=E(|u|^2)$. 由式 (2.1.18) 得

$$\|\varphi_x\|_{\infty,2}\leqslant \|u\|^2_{\infty,4},$$

$$\|u\varphi_x\|_{\infty,4/3}\leqslant C\|u\|^3_{\infty,4}.$$

结合 $\|\wedge f\|_{L^\infty(\mathbf{R},L^2(\mathbf{R}^n))}\leqslant c\|f\|_{L^{q'}(\mathbf{R},L^{r'}(\mathbf{R}^n))}$ 得到

$$
\begin{aligned}
\|\wedge(u\varphi_x)\|_{\infty,2} &\leqslant C\|u\varphi_x\|_{4/3,4/3}\\
&\leqslant CT^{3/4}\|u\varphi_x\|_{\infty,4/3}\leqslant CT^{3/4}\|u\|^3_{\infty,4}.
\end{aligned}
\tag{2.1.27}
$$

结合 $\|\wedge f\|_{L^q(\mathbf{R},L^r(\mathbf{R}^n))}\leqslant c\|f\|_{L^{q'}(\mathbf{R},L^{r'}(\mathbf{R}^n))}$, 可得

$$\|\wedge(u\varphi_x)\|_{4,4}\leqslant C\|u\varphi_x\|_{4/3,4/3}\leqslant CT^{3/4}\|u\|^3_{\infty,4},\tag{2.1.28}$$

其中, q', r' 是 q,r 的共轭指数. 现在设 $u,v\in B_R(X_0)$, 即

$$\max(\|u\|_{\infty,2},\|u\|_{\infty,4},\|v\|_{\infty,2},\|v\|_{\infty,4})<R.$$

令 $\varphi_x=E(|u|^2), \psi_x=E(|v|^2)$. 写成如下形式

$$u\varphi_x-v\psi_x=(u-v)\varphi_x+v(\varphi_x-\psi_x),$$

有估计

$$
\begin{aligned}
\|\wedge(u\varphi_x-v\psi_x)\|_X &\leqslant C\{\|(u-v)\varphi_x\|_{4/3,4/3}+\|v(\varphi_x-\psi_x)\|_{4/3,4/3}\}\\
&\leqslant C\{\|(u-v)\|_{4,4}\|u\|^2_{4,4}+\|v\|_{4,4}\|\varphi_x-\psi_x\|_{2,2}\}.
\end{aligned}
$$

但是

$$\|u\|_{4,4}^2 \leqslant T^{1/2}\|u\|_{\infty,4}^2$$

和 (由式 (2.1.19))

$$\begin{aligned}\|\varphi_x - \psi_x\|_{2,2} &\leqslant \||u|^2 - |v|^2\|_{2,2} \\ &\leqslant (\|u\|_{4,4} + \|v\|_{4,4})\|u - v\|_{4,4} \\ &\leqslant T^{1/4}(\|u\|_{\infty,4} + \|v\|_{\infty,4})\|u - v\|_{4,4},\end{aligned}$$

于是得到

$$\|\wedge(u\varphi_x - v\psi_x)\|_X \leqslant CT^{1/2}\mathbf{R}^2\|u - v\|_{4,4}, \tag{2.1.29}$$

引理 2.1.4 得证.

为了处理 H^1 范数, 引入空间

$$\begin{aligned}\bar{Y} = \bar{Y}(T) &= \{v \in \bar{X}, \nabla v \in \bar{X}\} \subset C(I; H^1), \\ Y = Y(T) &= \{v \in X, \nabla v \in X\} \subset L^\infty(I; H^1), \\ Y' = Y'(T) &= \{v \in X', \nabla v \in X'\}.\end{aligned}$$

赋予它们固有范数. 注意到

$$\|u\|_X \leqslant \|v\|_Y, \qquad \|f\|_{X'} \leqslant \|f\|_{Y'}, \qquad |v\|_{X_0} \leqslant C\|v\|_Y, \tag{2.1.30}$$

其中, C 不依赖于 T.

下面的引理是本节引理 2.1.8 的直接结论.

引理 2.1.5 从 H^1 到 $\bar{Y}$ 线性映射 $S(t), t \in \mathbf{R}$ 是有界的, 而从 Y' 到 $\bar{Y}$ 的映射 $\wedge$ 也是有界的. 在这两种情况下范数都不依赖于 T.

下面引理给出 F 的另一性质.

引理 2.1.6 映射 F 映射 Y 中的有界集到 Y' 中的有界集. 此外

$$\|F(v)\|_{Y'} \leqslant MT^{1/2}\|v\|_Y^3, \qquad \forall v \in Y. \tag{2.1.31}$$

证明 对 F 的局部部分的证明, 在 Kato(1987) 的引理 2.2 中已经证明, 因此仅考虑 F 中的非局部项. 首先, 因为 $Y \subset X_0 \subset X$, 由引理 2.1.4, 得到对任意的 $v \in Y$ 有 $G(v) = vE(|v|^2) \in X' = L^1(L^2) + L^{4/3}(L^{4/3})$.

为了证明 $\nabla G(v) \in X'$, 设 $h \in \mathbf{R}^2$ 且 τ_k 为 $\mathbf{R}^2$ 上的平移 h, 由于 G 与 τ_h 是可换的, 有

$$\begin{aligned}\|(\tau_h - I)G(v)\|_{4/3,4/3} &= \|G(\tau_h v) - G(v)\|_{4/3,4/3} \\ &\leqslant CT^{1/2}\|v\|_{\infty,4}^2\|(\tau_h - I)v\|_{4,4}.\end{aligned}$$

两边除以 $|h|$, 设 $|h| \longrightarrow 0$, 我们可得 $\nabla G(v) \in L^{4/3}(L^{4/3})$ 且

$$\|\nabla G(v)\|_{4/3,4/3} \leqslant CT^{1/2}\|v\|_{\infty,4}^2\|\nabla v\|_{4,4}.$$

因此

$$\|\nabla G(v)\|_{X'} \leqslant CT^{1/2}\|v\|_{X_0}^2\|\nabla v\|_X.$$

这就证明了 $G(v) \in Y'$. 然后由式 (2.1.30) 可得到式 (2.1.31).

设 $u_0 \in H^1_{\cdot}(\mathbf{R}^2)$, 定义映射 $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}v = S(\cdot)u_0 + \mathrm{i} \wedge F(v).$$

下面我们证明当 T 充分小时, 映射 $\mathcal{F}$ 在 $\bar{Y}$ 的一个适当的球域中是一压缩映射.

引理 2.1.7 对 $\forall u_0 \in H^1(\mathbf{R}^2)$ 和 $R > 0$, 我们设

$$B_R(u_0, Y) = \{v \in Y, \|v - S(\cdot)u_0\|_Y \leqslant R\}.$$

如果 T 足够小, $\mathcal{F}$ 是 $B_R(u_0, Y)$ 中的自身映射, 在 X 范数下它是一压缩映射.

证明 由引理 2.1.8 知 $S(\cdot)u_0 \in Y$. 引理 2.1.5, 引理 2.1.6 隐含了

$$\|\mathcal{F}v - S(\cdot)u_0\|_Y \leqslant CMT^{1/2}\|v\|_Y^3.$$

利用引理 2.1.8 可得如果 $CMT^{1/2}(\|S(\cdot)u_0\|_Y + R)^3 \leqslant R$, 则映射 T 是 $B_R(u_0, Y)$ 上的自身映射.

另一方面, 由引理 2.1.4 和引理 2.1.5 可得对 $\forall v, w \in B_R(u_0, Y)$ 有

$$\|\mathcal{F}v - \mathcal{F}w\|_X \leqslant C_\gamma MT^{1/2}(R + \|S(\cdot)u_0\|_Y)^2\|v - w\|_X.$$

这就证明了映射的压缩性.

H^1 中解的局部存在性的证明比较简单. 实际上, 由于带有 X 的距离的 $B_R(u_0, Y)$ 是完备的, $\mathcal{F}$ 有一个固定的点 $u \in Y$. 因此 $u = \mathcal{F}u \in \bar{Y} \subset \mathrm{C}(I; H^1)$ 是式 (2.1.19) 的解.

φ 的光滑性可以由奇异积分算子 E 的性质推出. 例如, 由于 $|u|_x^2 \in L^4(I; L^q(\mathbf{R}^2))$, $2 \leqslant q \leqslant 4$, 由经典的 Riesz 不等式

$$\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{L^p} \leqslant A_p\|\Delta_m f\|_{L_p}, \qquad 1 < p < \infty$$

(其中 $\Delta_m = \partial^2/\partial x^2 + m\partial^2/\partial y^2, m > 0$) 推得 $\nabla^2\varphi \in L^4(I; L^q(\mathbf{R}^2)), 2 \leqslant q \leqslant 4$.

在 H^1 中的解的局部存在性的证明通常是构造 L^2 中的最大解. 定理 2.1.1 中的条件 (ii)(对于 L^2 中足够小的初值的全局解存在性) 是式 (2.1.38) 的特殊情况. 当

$u_0 \in H^1$ 时, 在 H^1 中解的最大区间和 L^2 中解的最大区间 T^* 相同.H^2 的解的正则性的证明可以由 Segal 抽象定理 (Segal I　1963) 中得到, 且由 Brézis 和 Gallouët(1980) 中的 Brézis-Gallouët 不等式可以证明在 H^2 中的解的最大区间是 T^*, 而连续依赖性由 Kato(1987) 中的方法导出.

下面, 我们不加证明地给出线性 Schrödinger 方程的 $L^p - L^q$ 估计和光滑性质. 在 $\mathbf{R}^n$ 上我们引入二阶算子

$$Lu = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{2.1.32}$$

a_{ij} 是实常数, 二次型 (a_{ij}) 非退化. 我们考虑带有 L 的 Schrödinger 算子

$$Pu = \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + Lu, \tag{2.1.33}$$

记 $S(t)$ 是由 P 生成的所有 Sobolev 空间上的单位群和

$$\wedge f(t) = \int_0^t S(t-s) f(s) \mathrm{d}s, \tag{2.1.34}$$

有如下结论:

引理 2.1.8　设 $r \in [2, 2n/(n-2)), q \in (2, +\infty)$ 使得

$$\frac{2}{q} = n\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\Big),$$

则下面的估计成立:

$$\| \wedge f\|_{L^q(\mathbf{R}, L^r(\mathbf{R}^n))} \leqslant C \| \wedge f\|_{L^{q'}(\mathbf{R}, L^{r'}(\mathbf{R}^n))}, \tag{2.1.35}$$

$$\| \wedge f\|_{L^\infty(\mathbf{R}, L^2(\mathbf{R}^n))} \leqslant C \| \wedge f\|_{L^{q'}(\mathbf{R}, L^{r'}(\mathbf{R}^n))}, \tag{2.1.36}$$

$$\| \wedge f\|_{L^q(\mathbf{R}, L^r(\mathbf{R}^n))} \leqslant C \| \wedge f\|_{L^1(\mathbf{R}, L^2(\mathbf{R}^n))}, \tag{2.1.37}$$

$$\|S(\cdot)\phi\|_{L^q(\mathbf{R}, L^r(\mathbf{R}^n))} \leqslant C \|\phi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}. \tag{2.1.38}$$

2.2　$(+,+)$ 型和 $(-,+)$ 型在带权空间解的存在性

本节研究椭圆 - 椭圆型和双曲 - 椭圆型 DS 方程 (2.1.1) 整体存在性和有限时间爆破. 在 $\chi \leqslant \max(-b, 0)$ 的条件下运用能量守恒律来证明解的整体性. 另一方面, 若 $\chi > \max(-b, 0)$, 则解在有限时间爆破. 在定义带权积分 $\int (x^2+y^2)\left|v^2\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的条件下来证明某一类解的存在性.

一方面, 根据定理 2.1.1 的条件 (ii), 当方程 (2.1.1) 的初始值 u_0 有一个很小的 L^2 范数时, 可知此系统的解在时间上是全局的并对初始数据具有光滑性. 另一方面, 从式 (2.1.9) 和式 (2.1.10) 显然可以得到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int(\delta x^2+y^2)|u(x,y,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8E(u_0). \tag{2.2.1}$$

即至少在 $\delta=1$ 和 $E(u_0)<0$ 的情况下, 得不出满足式 (2.2.1) 的式 (2.1.1) 的全局解.

为了使上面的论证完全严格, 需在带权积分 $\int(\delta x^2+y^2)|u(x,y,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 有意义的条件下构造解.

2.2.1 存在性

引入空间 (此空间的相关性质可参见 Ginibre & Velo (1979))

$$\Sigma=\{v\in H^1(\mathbf{R}^2),(x^2+y^2)^{1/2}v\in L^2(\mathbf{R}^2)\}. \tag{2.2.2}$$

赋予其固有 Hilbert 范数 $|\cdot|$

$$|v|_\Sigma^2=\int_{\mathbf{R}^2}\{(1+x^2+y^2)|v|^2+|\nabla v|^2\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.2.3}$$

用这种记号, 分两种情况 $\delta=+1,\delta=-1(m>0)$ 来讨论.

定理 2.2.1 假设 $u_0\in\Sigma$, (u,φ) 是由定理 2.1.2 得到的方程 (2.1.1) 在 $[0,T^*)$ 上的最大解. 则

(i) 解满足

$$u\in C([0,T^*),\Sigma),\qquad \nabla u\in L^4((0,t);\times\mathbf{R}^2). \tag{2.2.4}$$

(ii) 等式 (2.2.1) 在 $[0,T^*)$ 的分布意义下成立.

在证明定理 2.2.1 之前, 我们给出一个引理, 它涉及一般的 $\mathbf{R}^n$ 中的线性 Schrödinger 方程.

引理 2.2.2 设 A 是一正则对称 $n\times n$ 矩阵, 定义 $B\equiv A^{-1}$, 线性算子 $J=(J_1,\cdots,J_n)$

$$J_kv=2\mathrm{i}t\exp(\mathrm{i}\phi(x)/4t)\frac{\partial}{\partial x_k}\{v\exp(-\mathrm{i}\phi(x)/4t)\}, \tag{2.2.5}$$

其中, $\phi(x)\equiv\sum\limits_{i,j=1}^n b_{ij}x_iy_j, B=(b_{ij})$, 此算子和一般的 Schrödinger 算子

$$L=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$$

可换.

在通常情况下, $(a_{ij}) = (\delta_{ij}) = (b_{ij})$ 是单位矩阵, 这个结论被看作线性 Schrödinger 算子 (Ginibre, Velo　1979) 的保角不变性.

通常把 J_k 写作

$$J_k v = 2\mathrm{i}t\frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^{n} b_{kl}x_l v. \tag{2.2.6}$$

定义 $S(t)$ 为 Schrödinger 的生成子, 根据 L 和 J_k 的可换性可以推出

$$J_k(t)S(t)u_0 = S(t)J_k(0)u_0, \tag{2.2.7}$$

即记 $u(t) = S(t)u_0$ 则满足

$$2\mathrm{i}t\frac{\partial u(t)}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^{n} b_{kl}x_l u(t) = S(t)\left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl}x_l u_0\right). \tag{2.2.8}$$

由于在 $H^m(\mathbf{R}^n)$ 中 $S(t)$ 是等距的, 对 $\forall m \geqslant 0$, 由式 (2.2.8) 可得到在 Σ 上的线性 Schrödinger 算子的 Cauchy 问题是适定的.

2.2.2　定理 2.2.1 中结论 (i) 的证明

首先, 由积分方程 (2.1.23)~(2.1.25), 它可看作是算子 $\mathcal{F}$ 在空间 $L^4((0,T)\times\mathbf{R}^2) \subset L^\infty((0,T);H^1(\mathbf{R}^2))$ 中的不动点问题:

$$(\mathcal{F}v)(t) = S(t)u_0 - \mathrm{i}\int_0^t S(t-s)F(v(s))\mathrm{d}s. \tag{2.2.9}$$

由引理 2.2.2, 可得到

$$\begin{aligned} J(t)(\mathcal{F}v)(t) &= J(t)S(t)u_0 - \mathrm{i}J(t)\int_0^t S(t-s)F(v(s))\mathrm{d}s, \\ J(t)(\mathcal{F}v)(t) &= S(t)(J(0)u_0) - \mathrm{i}\int_0^t S(t-s)J(s)F(v(s))\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

基于此, 引入从 $[0,T]$ 到 $H^1(\mathbf{R}^2)$ 的函数空间 Z

$$Z = \{v \in Y, (x^2+y^2)^{1/2}v \in X\}, \tag{2.2.11}$$

对它赋予范数

$$\|v\|_Z = \|v\|v_Y + \|Jv\|_X, \tag{2.2.12}$$

其中, Jv 是 $t \to J(t)v(t)$ 的函数.

根据式 (2.1.31) 知当 $R>0$ 时, 存在 $T_0(R)$, 使得当 $T\leqslant T_0(R)$ 时, 有

$$\|v-S(\cdot)u_0\|_Y\leqslant R\Rightarrow \|\mathcal{F}v-S(\cdot)u_0\|_Y\leqslant R, \tag{2.2.13}$$

对 $\forall\|v_1\|_y+\|v_2\|_Y\leqslant R_1, \forall R_1>0$, 存在 $C_1=C_1(R)$ 使得

$$\|\mathcal{F}v_1-\mathcal{F}v_2\|_X\leqslant C_1T^{1/2}\|v_1-v_2\|_X. \tag{2.2.14}$$

在 Z 上 $\mathcal{F}$ 有类似的性质. 我们在下面的引理 2.2.4 中叙述这一结果, 而它又是引理 2.2.3 的特例.

引理 2.2.3 存在一仅依赖于 χ 和 b 的常数 κ, 使得对 $\forall t, v\in Z$ 有

$$|J(t)F(v(t))|_{L^{4/3}}+|J(t)F(v(t))|_{L^2}\leqslant\kappa(|v(t)|_{L^4}^2+|v(t)|_{L^8}^2)|J(t)v(t)|_{L^4}. \tag{2.2.15}$$

引理 2.2.4 (i)$\forall r>0$, 存在 $T_1(r)$ 使得

$$\|v-S(\cdot)u(0)\|_Z\Rightarrow\|\mathcal{F}v-S(\cdot)u(0)\|_Z\leqslant r, \qquad \forall t\leqslant T(r).$$

(ii) $\forall R_3>0, \forall T_0>0$, 存在 $C_3=C_3(R_3,T_0)$ 使得 $\forall v_1,v_2\in Z$ 且 $\|v_1\|_Z+\|v_2\|_Z\leqslant R_3$. 对 $T\leqslant T_0$ 有

$$\|J(\mathcal{F}v_1-\mathcal{F}v_2)\|_X\leqslant C_3T^{3/8}(\|v_1-v_2\|_X+\|Jv_1-Jv_2\|_X). \tag{2.2.16}$$

在引理证明之前, 我们先来结束定理 2.2.1 中 (i) 的证明. 事实上, 设 $u_0\in\Sigma$, 令 u 为方程 (2.1.18) 在 $[0,T^*)$ 上的最大解. 我们知道特别有 $\forall\bar{T}<T^*$ 存在 $\bar{R}$ 使得

$$\|u\|_{Y(t)}\leqslant\bar{R}<\infty, \qquad 0<t\leqslant\bar{T}. \tag{2.2.17}$$

由引理 2.2.4 我们可以在球 $\|v-S(\cdot)u_0\|_Z\leqslant r_0$ 上利用不动点原理对方程 (2.1.18) 构造一个赋予范数 $v\to\|v\|_X+\|Jv\|_X$ 的最大解 v. 我们用 $[0,T_1^*)$ 表示这个解的最大时间区间. 由于 $\|v\|_Z\geqslant\|v\|_Y$ 我们有

$$T_1^*\leqslant T^*, \qquad 且在[0,T_1^*), u(t)=v(t). \tag{2.2.18}$$

实际上 $T_1^*=T^*$. 事实上, 如果 $T_1^*<T^*$ 则有 $T_1^*<\infty$ 且

$$\limsup_{t\to(T_1^*)^-}\|u\|_{Y(t)}+\|Ju\|_{X(t)}=\infty. \tag{2.2.19}$$

由式 (2.2.17) 和 $T_1^*=T^*$, 则知式 (2.2.19) 等价于

$$\limsup_{t\to(T_1^*)^-}\|Ju\|_{X(t)}=\infty. \tag{2.2.20}$$

在 $[0,T_1^*)$ 上 $(\mathcal{F}u)(t)=u(t)$ 由式 (2.2.10) 可得

$$J(t)u(t)=S(t)J(0)u_0-\mathrm{i}\int_0^t S(t-s)J(s)F(u(s))\mathrm{d}s.$$

因此

$$|J(t)u(t)|_{L^4}\leqslant|S(t)J(0)u_0|_{L^4}+\int_0^t|S(t-s)J(s)F(u(s))|_{L^4}\mathrm{d}s.$$

当 $p=4,n=2$ 时利用式 (2.1.38) 有

$$|J(t)u(t)|_{L^4}\leqslant|S(t)J(0)u_0|_{L^4}+C\int_0^t(t-s)^{-1/2}|J(s)F(u(s))|_{L^{4/3}}\mathrm{d}s.$$

由于 $u(s)$ 的 L^4,L^8 范数是有界的, 上界为 $\|u(s)\|_{H^1}$, 从式 (2.2.15) 和式 (2.2.17) 可得对 $t\in[0,T_1^*)$, 有

$$\begin{aligned}|J(t)u(t)|_{L^4}&\leqslant|S(t)J(0)u_0|_{L^4}+C\int_0^t(t-s)^{-1/2}|J(u(s))|_{L^4}\mathrm{d}s\\&\leqslant|S(t)J(0)u_0|_{L^4}+C't^{1/3}\left(\int_0^t|J(u(s))|_{L^4}^4\mathrm{d}s\right)^{1/4}.\end{aligned}$$

因此, 对 $0\leqslant t<T_1^*<\infty$ 有

$$|J(t)u(t)|_{L^4}^4\leqslant C''\left(|S(t)J(0)u_0|_{L_4}^4+\int_0^t|J(u(s))|_{L^4}^4\mathrm{d}s\right).$$

于是, 由于式 (2.1.38), 当 $q=r=4,n=2$, 且 $u_0\in\Sigma$, 有 $|S(\cdot)J(0)u_0|_{L^4}^4\in L^1(0,\infty)$. 然后由 Gronwall 引理, 上面不等式表明:

$$\int_0^{T_1^*}|J(s)u(s)|_{L^4}^4\mathrm{d}s<\infty. \tag{2.2.21}$$

回到式 (2.2.10), 同样可得

$$|J(t)u(t)|_{L^2}\leqslant|S(t)J(0)u(0)|_{L^2}+\int_0^t|S(t-s)J(s)F(u(s))|_{L^2}\mathrm{d}s.$$

由于 $S(t)$ 是 L^2 中的酉算子, 于是

$$|J(t)u(t)|_{L^2}\leqslant|u_0|_\Sigma+\int_0^t|J(s)F(u(s))|_{L^2}\mathrm{d}s,$$

再由式 (2.2.15) 和式 (2.2.17) 可得

$$|J(t)u(t)|_{L^2}\leqslant|u_0|_\Sigma+C\int_0^t|J(u(s))|_{L^4}\mathrm{d}s.$$

因此 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T_1^*}|J(t)u(t)|_{L^2}<\infty$, 结合式 (2.2.12), 可以看到式 (2.2.20) 是不合理的, 于是有 $T_1^*=T^*$. 为完成定理 2.2.1(i) 的证明, 注意到解关于时间的连续性, 即从式 (2.2.10) 得到 $u\in C([0,T^*],\Sigma)$.

下面来证明引理 2.2.3 和引理 2.2.4, 根据式 (2.2.15), 设 $v\in Z$ 并

$$J(t)v(t)=2\mathrm{i}t\exp(\mathrm{i}\phi(x)/4t)\nabla w(t),\quad w(t)=v(t)\exp(-\mathrm{i}\phi(x)/4t).\tag{2.2.22}$$

由于 $|w(t)|=|v(t)|$, 有

$$J(t)F(v(t))=2\mathrm{i}t\exp(\mathrm{i}\phi(x)/4t)\nabla F(w(t)),$$

因而,

$$|J(t)F(v(t))|=2|t||\nabla F(w(t))|.\tag{2.2.23}$$

因此有

$$|J(t)F(v(t))|_{L_{4/3}}=2|t||\nabla F(w(t))|_{L_{4/3}},$$

且由于

$$\nabla F(w)=\chi(\nabla|w|^2)w+bE(\nabla|w|^2)w+\chi|w|^2\nabla w+bE(|w|^2)\nabla w,$$

我们有

$$|\nabla F(w)|_{L_{4/3}}\leqslant C(\chi,b)|w|_{L^4}^2|\nabla w|_{L^4}.$$

连续应用 Hölder 不等式, 且因 E 是 L^2 上的酉算子, 则由于 $|w|_{L^4}=|v|_{L^4}$, 可得

$$|J(t)F(v(t))|_{L_{4/3}}\leqslant C(\chi,b)|v|_{L^4}^2 2|t||\nabla w|_{L^4}.$$

因此利用式 (2.2.22) 有

$$|J(t)F(v(t))|_{L_{4/3}}\leqslant C(\chi,b)|v(t)|_{L^4}^2|J(t)v(t)|_{L^4}.$$

类似地有

$$|J(t)F(v(t))|_{L_{4/3}^2}=2|t||\nabla F(w)|_{L^2}\leqslant C(\chi,b)|v(t)|_{L^8}^2|J(t)v(t)|_{L^4}.$$

引理 2.2.3 得证.

考虑到引理 2.2.4 的证明是非常技巧的且是初等的, 这里只给出其主要步骤. 根据引理 2.1.5 和引理 2.1.6, 为了证明引理 2.2.4 的 (i), 对 $\|v-S(\cdot)u_0\|_Z\leqslant r$ 我们仅需要估计 $\|J(\mathcal{F}v-S(\cdot)u_0)\|_X$, 但是

$$\|J(\mathcal{F}v-S(\cdot)u_0)\|_X=\left\|\int_0^t S(t-s)J(s)F(v(s))\mathrm{d}s\right\|_X.$$

如同引理 2.2.3 的证明, 我们得到

$$\left\|\int_0^t S(t-s)J(s)F(v(s))\mathrm{d}s\right\|_X \leqslant C(r)(T^{1/2}+T^{3/4})\|v\|_Z.$$

因此结论成立.

关于式 (2.2.16) 的证明, 我们也需要估计 $\|J(\mathcal{F}v_1-\mathcal{F}v_2)\|_X$, 利用式 (2.2.14), 我们有

$$\|J(\mathcal{F}v_1-\mathcal{F}v_2)\|_X=\left\|\int_0^t S(t-s)J(s)(F(v_1(s))-F(v_2(s)))\mathrm{d}s\right\|_X$$

和

$$\|J(\mathcal{F}v_1-\mathcal{F}v_2)\|_{L^4}(t)=C\int_0^t (t-s)^{-1/2}|J(F(v_1)-F(v_2))|_{L^{4/3}}(s)\mathrm{d}s, \tag{2.2.24}$$

$$\|J(\mathcal{F}v_1-\mathcal{F}v_2)\|_{L^2}(t)=\int_0^t |J(F(v_1)-F(v_2))|_{L^2}(s)\mathrm{d}s. \tag{2.2.25}$$

利用式 (2.2.22) 得到

$$\|J(\mathcal{F}v_1-\mathcal{F}v_2)\|=2|t||\nabla(F(w_1)-F(w_2))|.$$

由于在一般情况证明是相同的, 这里我们只就 $\chi=1, b=0$ 即 $F(w)=|w|^2w$ 的特殊情况来继续证明引理 2.2.4.

我们有

$$F(w_1)-F(w_2)=|w_2|^2(w_1-w_2)+w_1(\bar{w}_1-\bar{w}_2)+(w_1-w_2)w_1\bar{w}_2,$$

且几次利用 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}
&|\nabla(F(w_1)-F(w_2))|_{L^{4/3}}\\
\leqslant&2|\nabla(w_1-w_2)_{L^4}(|w_1|_{L^4}^2+|w_2|_{L^4}^2)\\
&+6|w_1-w_2|_{L^{8/3}}\cdot(|\nabla w_1|_{L^4}+|\nabla w_2|_{L^4})(|w_1|_{L^8}+|w_2|_{L^8}).
\end{aligned}$$

返回式 (2.2.24), 利用式 (2.2.22) 和 $\|v_1\|_Z+\|v_2\|_Z\leqslant R_3$, 得到

$$\begin{aligned}
&|J(\mathcal{F}v_1-\mathcal{F}v_2)|_{L^4}(t)\\
\leqslant&\int_0^t (t-s)^{-1/2}\left(|J(v_1-v_2)|_{L^4}(s)\right.\\
&\left.+|v_1-v_2|_{L^{8/3}}(s)|Jv_1|_{L^4}(s)+|Jv_2|_{L^4}(s)\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

则由于

$$\int_0^t (t-s)^{-1/2}(J(v_1-v_2)|_{L^4}(s)\mathrm{d}s\leqslant 3t^{1/4}\left(\int_0^t |J(v_1-v_2)|_{L^4}^4\mathrm{d}s\right)^{1/4}$$

和

$$\begin{aligned}&\int_0^t (t-s)^{-1/2}|v_1-v_2|_{L^{8/3}}(|J(v_1)|_{L^4}+|J(v_2)|_{L^4})\mathrm{d}s\\ \leqslant&\left(\int_0^t (t-s)^{-4/5}\mathrm{d}s\right)^{5/8}\left(\int_0^t |w_1-w_2|_{L^4}^4\mathrm{d}s\right)^{1/8}\|w_1-w_2\|_{\infty,2}^{1/2}\\ &\cdot\left(\int_0^t (|Jv_1|_{L^4}+|Jv_2|_{L^4})^4\mathrm{d}s\right)^{1/4}\\ \leqslant& Ct^{1/8}\|w_1-w_2\|_X(\|v_1\|_Z+\|v_2\|_Z),\end{aligned}$$

对时间积分得到

$$\left(\int_0^T |J(\mathcal{F}v_1-\mathcal{F}v_2)|_{L^4}^4\mathrm{d}t\right)^{1/4}\leqslant CT^{3/8}\|w_1-w_2\|_X.$$

易得式 (2.2.25) 的估计, 和前面的估计一起导出式 (2.2.16).

2.2.3 椭圆 - 椭圆型的爆破结果

现在讨论 $\delta=+1$ 时的椭圆 - 椭圆的情况. 将证明:

定理 2.2.5 用 Σ_- 表示 $v\in\Sigma$ 中满足 $E(v)<0$ 的集合,

(i) 集合 Σ_- 是非空的, 当且仅当 $\chi<\max(-b,0)$.

(ii) 当 $\chi\geqslant\max(-b,0)$ 时, 由定理 2.1.2 得到的解是全局解, 即 $T^*=\infty$.

(iii) 当 $\chi<\max(-b,0)$ 时, 对 $\forall u_0\in\Sigma_-$, 在定理 2.2.1 中得到的式 (2.1.1) 的在 $[0,T^*)$ 上的最大解, 满足 $T^*<\infty$.

证明 由 v 的 Fourier 变换 $\hat{v}$, 则 v 的能量式 (2.1.8) 为

$$E(v)=\int|\xi|^2|\hat{v}|^2\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\int\left(\chi+\frac{b\xi^2}{\xi_1^2+m\xi_1^2}\right)|\hat{f}|^2\mathrm{d}\xi,\tag{2.2.26}$$

其中, $f(x,y)\equiv|v(x,y)|^2$.

取 $v_\lambda(x,y)=\lambda\exp\{-[(x^2/\beta^2)+(y^2/\gamma^2)]\}$, 其中 λ,β,γ 是正实数, 有

$$E(v_\lambda)=a\lambda^2+J\lambda^4.$$

最后一积分 (J) 可以显式计算并且它与下面的式 (2.2.27) 符号相同.

$$\chi+b\sqrt{m\gamma}/(\beta+\sqrt{m\gamma}).\tag{2.2.27}$$

因此当 $\chi<\max(-b,0)$ 时, 通过适当的选取 β 和 γ, 则可得式 (2.2.27), 且因此 J 是负的. 于是取 λ 充分大时, 可找到一点 $v_\lambda\in\Sigma_-$. 相反地, 当 $\chi\geqslant\max(-b,0)$ 时,

由式 (2.2.26) 可得到对每一 $v \in H^1(\mathbf{R}^2)$, 都有 $E(v) \geqslant \int |\nabla v|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 这就证明了定理 2.2.5 的 (i).

下面考虑定理 2.2.5 的 (ii), 在这种情况下综合考虑质量守恒式 (2.1.5) 和能量 $E(v)$ 可得到 v 的 H^1 范数的一致有界性. 于是立即可得到 (ii).

最后来考虑 (iii). 设 $\chi < \max(-b, 0)$, 取 $u_0 \in \Sigma_-$. 根据式 (2.2.1) 有

$$\int (x^2+y^2)|u|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4E(u_0)t^2 + ct + \int (x^2+y^2)|u_0|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.2.28}$$

因为 $E(u_0) < 0$, 右边在有限时间内为负, 这表明由定理 2.2.1 得到的解有一有限存在区间.

2.3　$(+,-)(-,-)$ 型 Cauchy 问题

考虑以下 DS 系统的初值问题

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\partial_t u + \delta\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = c_1|u|^2 u + c_2 u\partial_x\varphi, \qquad x, y \in \mathbf{R}, t > 0, \\ &\partial_x^2\varphi + m\partial_y^2\varphi = \partial_x |u|^2, \\ &u(x,y,0) = u_0(x,y). \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

设 $\varphi(.)$ 满足：当 $x+y \to \infty, x-y \to \infty$ 时, $\varphi(x,y,t) \to 0$ (不失一般性, 我们取 $m=-1$), 这就保证对于 $F \in L^1(\mathbf{R}^2), \mathcal{K}^{-1}F$ 的定义由 $\mathcal{K}\varphi = (\partial_x^2 - \partial_y^2)\varphi = F$ 给出. 于是式 (2.3.1) 就等价于

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\partial_t u + \delta\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = c_1 |u|^2 u + c_2 u\mathcal{K}^{-1}|u|^2, \\ &u(x,y,0) = u_0(x,y). \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

当 $\delta > 0$ 时, 上式对应椭圆 - 双曲型, $\delta < 0$ 时对应双曲 - 双曲型.

本节的目的是建立 $(+,-), (-,-)$ 这两种类型的小初值 IVP(2.3.2)($\delta \neq 0$) 的局部适定性, 包括存在性、唯一性和稳定性 (也就是说对任意的 $\delta > 0$, 其解 $u(.)$ 描述了空间 X 的一条连续曲线).

在双曲 - 双曲型 (也就是 $\delta < 0$ 的情形), 将 xy 平面旋转、变换后, 式 (2.3.2) 可以写为

$$\mathrm{i}\partial_t u - \partial_{xy}^2 u = c_1 |u|^2 u + c_2 u\mathcal{K}^{-1}(\partial_x^2 + m\partial_y^2)|u|^2, \tag{2.3.3}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y). \tag{2.3.4}$$

其中, $\mathcal{K}\varphi = \partial_{xy}^2\varphi$($\varphi$ 满足一定的映射条件), c_1, c_2, m 是任意的常量.

为方便理解, 首先考虑与式 (2.3.4) 相关的问题

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\partial_t u - \partial_{xy}^2 u = 0, \\ &u(x,y,0) = u_0(x,y). \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

由下面的定理 2.3.3 知, 对于任意的 $y \in \mathbf{R}$, 总存在 $c > 0$ 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |D_x^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}u_0(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x,y)|^2\mathbf{d}x\mathbf{d}y. \tag{2.3.6}$$

用 $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ 表示初值问题 (2.3.5) 的解算子群,

$D_x^{1/2}v(x,y,t) = c\left(|\xi|^{1/2}\widehat{v}^{(x)}(\xi,y,t)\right)^{\vee}$, $\widehat{v^{(x)}}$ 表示关于变量 x 的 Fourier 变换. 注意到式 (2.3.6) 是一个关于 $L_y^\infty L_t^2 L_x^2$ 范数的整体估计, 本节我们证明两个主要定理.

定理 2.3.1 对任意的 $u_0 \in H^s(\mathbf{R}^2) \cap H^3(\mathbf{R}^2 : r^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y) \equiv Y_s (s \geqslant 6)$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\delta_0 = \|u_0\|_{H_{xy}^6} + \|u_0\|_{H_{xy}^3(r^2)} < \delta.$$

又存在 $T = T(\delta_0) > 0$(当 $\delta_0 \to 0$ 时, $T(\delta_0) \to 0$) 和 IVP(2.3.4) 的唯一的古典解 $u(.)$, 其满足

$$u \in C([0,T] : Y_s), \tag{2.3.7}$$

$$||D_x^{s+1/2}u||_{L_y^\infty L_T^2 L_x^2} \equiv \sup_y \left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} |D_x^{s+1/2}u(x,y,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/2} < \infty \tag{2.3.8}$$

和

$$||D_y^{s+1/2}u||_{L_x^\infty L_T^2 L_y^2} \equiv \sup_x \left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} |D_y^{s+1/2}u(x,y,t)|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{1/2} < \infty. \tag{2.3.9}$$

进一步, 对任意的 $T' \in (0,T)$, 在 Y_s 中都存在 u_0 的一个邻域 V_{u_0}, 使得 V_{u_0} 到式 (2.3.7)~ 式 (2.3.9) 中由 T' 定义的映射类 $\tilde{u}_0 \to \tilde{u}(t)$ 是 Lipschitz.

对于椭圆 - 双曲型 IVP 问题 (即 $\delta = 1$), 可以通过对 xy 平面旋转变换, 方程 (2.3.2) 就可变为

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\partial_t u - \Delta u = c_1 |u|^2 u + c_2 u\mathcal{K}^{-1}(\partial_x^2 + m\partial_y^2)|u|^2, \\ &u(x,y,0) = u_0(x,y). \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

其中, $\mathcal{K}\varphi = \partial_{xy}^2\varphi$, 且 c_1, c_2, m 是任意的常量. 对这类问题, 有如下定理.

定理 2.3.2 对任意的

$$u_0 \in H^s(\mathbf{R}^2) \cap H^3(\mathbf{R}^2 : r^6 \mathrm{d}x\mathrm{d}y) \equiv W_s (s \geqslant 12),$$

存在大于零的数 $\delta > 0$, 使得

$$\delta_0 = \|u_0\|_{H^{12}_{xy}} + \|u_0\|_{H^6_{xy}(r^6)} < \delta,$$

则存在 $T = T(\delta_0) > 0$(当 $\delta_0 \to 0$ 时, $T(\delta_0) \to 0$) 和初值问题 (2.3.10) 的唯一的古典解 $u(\cdot)$, 其满足

$$u \in C([0,T] : W_s) \tag{2.3.11}$$

和

$$\sup_{\alpha,\beta} \left(\int_0^T \int_\beta^{\beta+1} \int_\alpha^{\alpha+1} |D^{s+1}_{x,y} u(x,y,t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t \right)^{1/2} < \infty. \tag{2.3.12}$$

对任意的 $T' \in (0,T)$, 在 Y_s 中都存在 u_0 的一个邻域 $\tilde{V}_{u_0}$, 使得 $\tilde{V}_{u_0}$ 到式 (2.3.11)~式 (2.3.12) 中由 T' 定义的映射类 $\tilde{u}_0 \to \tilde{u}(t)$ 是 Lipschitz.

2.3.1 线性估计

本节推导出与线性初值问题 (IVP)(2.3.1) 相关的几个估计

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\partial_t u + \delta\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, \qquad \delta = \pm 1, \\ &u(x,y,0) = u_0(x,y). \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

首先考虑双曲 - 双曲型 IVP 问题 (即 $\varepsilon = -1$). 对式 (2.3.13) 作适当的变换可得到

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\partial_t u - \partial_{xy}^2 u = 0, \\ &u(x,y,0) = u_0(x,y). \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

下面将建立解算子群 $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ 中的几个估计形式.

定理 2.3.3 对任意的 $y \in \mathbf{R}$, 总存在 $c > 0$, 使得当 $u_0 \in L^2(\mathbf{R}^2)$ 时 IVP(2.3.14) 的解 $u(\cdot,\cdot,\cdot)$ 满足

$$||D_x^{1/2} u(\cdot,y,\cdot)||_{L_t^2 L_x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_x^{1/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2} u_0(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \equiv c||u_0||_2. \tag{2.3.15}$$

显然, 若把变量 x 和 y 互换, 上式仍成立.

证明 通过 Fourier 变换有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2} u_0(x,y) = c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\xi+y\eta)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi\eta} \hat{u}_0(\xi,\eta) \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

再令 $a=\xi\eta$, $b=\xi$, 对变量 (x,t) 应用 Plancherel 定理, 回到原来变量, 再应用 Plancherel 定理, 可得

$$
\begin{aligned}
&\|D_x^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}u_0(x,y)\|_{L_t^2L_x^2}\\
=&c\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\xi+y\eta)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi\eta}|\xi|^{1/2}\hat{u}_0(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right\|_{L_t^2L_x^2}\\
=&c\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xb}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ya/b}|b|^{1/2}\hat{u}_0(\cdot,\cdot)\frac{1}{|b|}\mathrm{d}a\mathrm{d}b\right\|_{L_t^2L_x^2}\\
=&c\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{|b|^{1/2}}\hat{u}_0(\cdot,\cdot)\right|^2\mathrm{d}a\mathrm{d}b\right)^{1/2}\\
=&c\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{u}_0(\xi,\eta)|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right)^{1/2}=c\|u_0\|_2.
\end{aligned}
$$

推论 2.3.4 令 $F\in L_y^1(\mathbf{R}:L_{(x,t)}^2(\mathbf{R}^2))$, 则有

$$
\left\|D_x^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}F(\cdot,\cdot,t)\mathrm{d}t\right\|_{L_x^2L_y^2}\leqslant c\|F\|_{L_y^1L_t^2L_x^2},\tag{2.3.16}
$$

这里

$$
D_x^{1/2}G(x,y,t)=c(|\xi|^{1/2}\hat{G}^{(x)}(\xi,y,t))^{\vee}.
$$

证明 由式 (2.3.15) 的对偶性得证.

下面考虑非齐次 IVP

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\partial_t u-\partial_{xy}^2u=F(x,y,t),\\
&u(x,y,0)=0.
\end{aligned}\tag{2.3.17}
$$

其解 $u(\cdot)$ 由下式得到

$$
u(t)=\int_0^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial_{xy}^2}F(\cdot,\cdot,t')\mathrm{d}t'.\tag{2.3.18}
$$

定理 2.3.5 若 $u(\cdot)$ 为 IVP(2.3.17) 的解, 那么有

$$
\|\partial_x u\|_{L_y^\infty L_t^2L_x^2}\leqslant c\|F\|_{L_y^1L_t^2L_x^2}.\tag{2.3.19}
$$

证明 对时间、空间变量作 Fourier 变换

$$
\tilde{u}(x,y,t)=c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\xi+y\eta+t\tau)}\frac{1}{\tau-\xi\eta}\hat{F}(\xi,\eta,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau.
$$

再应用 Plancherel 定理有

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x\tilde{u}(\cdot,y,\cdot)\|_{L_t^2L_x^2}\\
=&c\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\xi+y\eta+t\tau)}\frac{1}{\tau/\xi-\eta}\hat{F}(\xi,\eta,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau\right\|_{L_t^2L_x^2}\\
=&c\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\eta}\frac{1}{\tau/\xi-\eta}\hat{F}(\xi,\eta,\tau)\mathrm{d}\eta\right\|_{L_\tau^2L_\xi^2}\\
=&c\left\|\int_{-\infty}^{\infty}K(y-y',\xi,\tau)\hat{F}^{(x,t)}(\xi,y',\tau)\mathrm{d}y'\right\|_{L_\tau^2L_\xi^2},
\end{aligned}\tag{2.3.20}$$

其中

$$K(y-y',\xi,\tau)=c\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y-y')\eta}\frac{1}{\tau/\xi-\eta}\mathrm{d}\eta,$$

$\hat{F}^{(x,t)}$ 表示 F 关于变量 x,t 的 Foureier 变换, 与 Hilbert 变换的 Kernel 相比较, 易得知 $K\in L^\infty(\mathbf{R}^3)$. 结合式 (2.3.20), 应用 Minkowski 积分不等式和 Plancherel 定理, 得到对任意的实数 y, 以下不等式成立

$$\|\partial_x\tilde{u}(\cdot,y,\cdot)\|_{L_t^2L_x^2}\leqslant c\int_{-\infty}^{\infty}\hat{F}^{(x,t)}(\cdot,y',\cdot)\|_{L_t^2L_x^2}\mathrm{d}y'=c\|F\|_{L_y^1L_t^2L_x^2}.\tag{2.3.21}$$

由 Parseval 等式, 解 $\tilde{u}(x,y,t)$ 满足

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x,y,0)&=c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau-\xi\eta}\hat{F}(\xi,\eta,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\xi+y\eta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\
&=c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t'\xi\eta}sgn(t')\hat{F}^{(x,y)}(\xi,\eta,t')\mathrm{d}t'\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\xi+y\eta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\
&=c\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t'\partial_{xy}^2}sgn(t')F(\cdot,\cdot,t')\mathrm{d}t'.
\end{aligned}\tag{2.3.22}$$

由式 (2.3.4) 知, $D_x^{1/2}\tilde{u}(x,y,0)\in L^2(\mathbf{R}^2)$, 再由于

$$u(x,y,t)=\tilde{u}(x,y,t)-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}\tilde{u}(x,y,0),$$

结合式 (2.3.22), 式 (2.3.15) 和上面的注得到式 (2.3.19).

下面我们再回忆群 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}\}_{-\infty}^{\infty}$ 的几个估计.

为方便理解, 介绍以下这个概念: 定义

$$Q_{\alpha,\beta}=I_\alpha\times I_\beta=[\alpha,\alpha+I]\times[\beta,\beta+I],$$

那么 $\{Q_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta\in Z}$ 则构成了由不重叠的内点组成的一族, 且有 $R^2=\bigcup\limits_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}Q_{\alpha,\beta}$.

定理 2.3.6 令 $u_0 \in L^2(\mathbf{R}^2)$, 那么有

$$\sup_{\alpha,\beta\in Z}\left(\int_{Q_{\alpha,\beta}}\int_{-\infty}^{\infty}|D_{x,y}^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}u_0(x,y)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}\leqslant c\|u_0\|_2, \tag{2.3.23}$$

其中 $D_{x,y}^{1/2}G(x,y,t)=(|(\xi,\eta)|^{1/2}\hat{G}^{(x,y)}(\xi,\eta,t))^\vee$.

令 $F\in L^1_{\alpha,\beta}(L^2(Q_{\alpha,\beta}\times R))$, 那么

$$\begin{aligned}&\left\|D_{x,y}^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}F(\cdot,\cdot,t)\mathrm{d}t\right\|_{L_x^2L_y^2}\\ \leqslant& c\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\left(\int_{Q_{\alpha,\beta}}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x,y,t)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2},\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

且

$$\begin{aligned}&\sup_{\alpha,\beta\in Z}\left(\int_{Q_{\alpha,\beta}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\nabla_{x,y}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')}F(\cdot,\cdot,t')\mathrm{d}t'\right|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}\\ \leqslant& c\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\left(\int_{Q_{\alpha,\beta}}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x,y,t)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2},\end{aligned} \tag{2.3.25}$$

其中 $\nabla_{x,y}=(\partial_x,\partial_y)$.

证明 估计式 (2.3.23) 是一个经典结果. 而式 (2.3.24) 是式 (2.3.23) 的对偶形式. 式 (2.3.25) 则是 Kenig, Ponce, Vega(1993) 中的结果.

下面给出几个引理, 它们将在非线性估计证明中用到.

引理 2.3.7 令 $u_0\in H^4(\mathbf{R}^2)\cap H^3(\mathbf{R}^2:r^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$, 那么

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{[-T,T]}\sup_{x}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}u_0(x,y)\right|\mathrm{d}y\\ \leqslant& c(1+T^2)\|u_0\|_{H_{xy}^4}+c(1+T)\|u_0\|_{H_{xy}^3(r^2)},\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

其中

$$\|u_0\|_{H_{xy}^k(r^l)}\equiv\sum_{|\alpha|\leqslant k}\left(\int_{\mathbf{R}^2}\left|\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}u_0(x,y)\right|^2r^l\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}, \tag{2.3.27}$$

且 $r=(x^2+y^2)^{1/2}$.

证明 为简单起见, 仅对 $T>0$ 作详细证明.

对任意 (y,t), x 固定, 由 Sobolev 空间理论有

$$\sup_x\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}u_0(x,y)\right|\leqslant x\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}u_0\right\|_{L_x^2}+c\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}\partial_xu_0\right\|_{L_x^2}.$$

若 y 固定, 则有相似结论.

$$
\begin{aligned}
&\sup_{[0,T]}\sup_{x}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}u_0(x,y)\right| \\
\leqslant&\frac{c}{T}\int_0^T\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}u_0\right\|_{L_x^2}\mathrm{d}t+c\int_0^T\left|\frac{\partial}{\partial t}\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}u_0\right\|_{L_x^2}\right|\mathrm{d}t \\
&+\frac{c}{T}\int_0^T\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}\partial_x u_0\right\|_{L_x^2}\mathrm{d}t+c\int_0^T\left|\frac{\partial}{\partial t}\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}\partial_x u_0\right\|_{L_x^2}\right|\mathrm{d}t. \qquad (2.3.28)
\end{aligned}
$$

使用不等式

$$
\|g\|_{L_y^1}\leqslant c\{\|g\|_{L_y^2}+\|yg\|_{L_y^2}\},
$$

以及 Minkowski 积分不等式和等式

$$
y\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}u_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}yu_0-\mathrm{i}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}\partial_x u_0,
$$

有

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c}{T}\int_0^T\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}u_0\right\|_{L_x^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}y \\
\leqslant&\frac{c}{T}\int_0^T\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}u_0\right\|_{L_x^2L_y^2}\mathrm{d}t+\frac{c}{T}\int_0^T\left\|y\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}u_0\right\|_{L_x^2L_y^2}\mathrm{d}t \\
\leqslant&c\left\{\|u_0\|_{L_x^2L_y^2}+\|yu_0\|_{L_x^2L_y^2}+T\|\partial_x u_0\|_{L_x^2L_y^2}\right\},
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T\left|\frac{\partial}{\partial_t}\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}u_0\right\|_{L_x^2}\right|\mathrm{d}t\mathrm{d}y \\
=&\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}\partial_{xy}^2u_0\right\|_{L_x^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}t \\
\leqslant&c\int_0^T\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}\partial_{xy}^2u_0\right\|_{L_x^2L_y^2}\mathrm{d}t+c\int_0^T\left\|y\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}\partial_{xy}^2u_0\right\|_{L_x^2L_y^2}\mathrm{d}t \\
\leqslant&cT\left\|\partial_{xy}^2u_0\right\|_{L_x^2L_y^2}+cT\left\|y\partial_{xy}^2u_0\right\|_{L_x^2L_y^2}+cT^2\left\|\partial_{xxy}^3u_0\right\|_{L_x^2L_y^2}. \qquad (2.3.29)
\end{aligned}
$$

将这些结果应用于式 (2.3.28) 右端的后两项可得到式 (2.3.26).

应用定理 2.3.6 前的推理和式 (2.3.27), 得到关于群 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}\}$ 相应的结果.

引理 2.3.8　令 $u_0\in H^6(\mathbf{R}^2)\cap H^6(\mathbf{R}^2:r^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$, 则

$$
\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\sup_{[0,T]}\sup_{Q_{\alpha,\beta}}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}u_0|\leqslant c(1+T^5)\{\|u_0\|_{H_{xy}^6}+\|u_0\|_{H_{xy}^6(r^6)}\}.
$$

证明过程参看 Kenig, Ponce, Vega(1993) 中命题 3.7.

下一步推导与问题 (2.3.1) 第二个方程有关的几个估计. 考虑问题

$$\partial_{xy}^2 w(x,y) = \mathcal{K}w = F(x,y), \tag{2.3.30}$$

$F \in L^1(\mathbf{R}^2), w(\cdot,\cdot)$ 满足散射条件

$$\lim_{x\to+\infty} w(x,y) = \lim_{y\to+\infty} w(x,y) = 0.$$

由上面假设, 方程 (2.3.30) 有唯一解, 其解由下式给出

$$w(x,y) = \mathcal{K}^{-1}F = \int_x^\infty \int_y^\infty F(x',y')\mathrm{d}y'\mathrm{d}x'. \tag{2.3.31}$$

命题 2.3.9 若 $F \in L^1(\mathbf{R}^2)$, 则 $F \in L^1(\mathbf{R}^2)$, 且

$$\left\|\mathcal{K}^{-1}F\right\|_{L_x^\infty L_y^\infty} \leqslant c\left\|F\right\|_{L_x^1 L_y^1}. \tag{2.3.32}$$

另外, 若 $F \in L_y^1(R : L_x^2(\mathbf{R}))$, 那么

$$\left\|\partial_x\mathcal{K}^{-1}F\right\|_{L_y^\infty L_x^2} \leqslant c\left\|F\right\|_{L_y^1 L_x^2}. \tag{2.3.33}$$

注意到

$$\|F\|_{L_y^p L_x^q} = \left(\int_{-\infty}^\infty \|F(\cdot,y)\|_q^p \mathrm{d}y\right)^{1/p}.$$

证明 式 (2.3.32) 直接由式 (2.3.31) 得到, 再由式 (2.3.31), 令

$$\partial_x\mathcal{K}^{-1}F(x,y) = -\int_y^\infty F(x,y')\mathrm{d}y',$$

使用 Minkowski 积分不等式可得式 (2.3.33).

2.3.2 非线性估计

本节我们将获得定理 2.3.1, 定理 2.3.2 证明中所需要的所有的非线性估计. 首先讨论有关分数导数的几个不等式.

定理 2.3.10 令 $s > 0, o < \alpha < 1, \alpha_1, \alpha_2 \in [0,\alpha]$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. 又令 $p, p' \in (1,\infty)$, 且有 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $q \in [1,\infty)$, 那么对任意的 $f, g \in \wp(\mathbf{R}^n)$(Schwartz 类), 有

$$\begin{aligned}\left\|(I-\Delta)^{s/2}(fg)\right\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leqslant & c\left\{\|f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}\left\|(I-\Delta)^{s/2}g\right\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}\right. \\ & \left.+\|g\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}\left\|(I-\Delta)^{s/2}f\right\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}\right\},\end{aligned} \tag{2.3.34}$$

$$\sum_{|\beta|=k}\left\|\partial^{\beta}(fg)\right\|_{L^{q}(\mathbf{R}^{n})}$$
$$\leqslant c\left\{\|f\|_{L^{\infty}(\mathbf{R}^{n})}\sum_{|\beta|=k}\left\|\partial^{\beta}g\right\|_{L^{q}(\mathbf{R}^{n})}+\|g\|_{L^{\infty}(\mathbf{R}^{n})}\sum_{|\beta|=k}\left\|\partial^{\beta}f\right\|_{L^{q}(\mathbf{R}^{n})}\right\}, \tag{2.3.35}$$

$$\|D^{\alpha}(fg)\|_{L^{p}}\leqslant c\left\{\|g\|_{L^{p_1}}\|D^{\alpha}f\|_{L^{p_2}}\|f\|_{L^{\infty}}\|D^{\alpha}g\|_{L^{p}}\right\}, \tag{2.3.36}$$

其中 $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}=\dfrac{1}{p},p_1,p_2\in[p,\infty]$.

$$\|D^{\alpha}(fg)-fD^{\alpha}g-gD^{\alpha}f\|_{L^{1}}\leqslant c\|D^{\alpha_1}f\|_{L^{p}}\|D^{\alpha_2}g\|_{L^{p}}. \tag{2.3.37}$$

证明 估计 (2.3.34) 的证明已在 Kenig, Ponce, Vega(1993) 中给出. 式 (2.3.35) 可由 Galiardo-Nirenberg, Hölder 和 Young 不等式得到. 而式 (2.3.36)、式 (2.3.37) 则分别在 Kenig, Ponce, Vega(1993) 中被讨论.

命题 2.3.11 若 $k=s-1/2\in Z(k\geqslant 3)$, 那么

$$\left\|\partial_x^{k+1}\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial_{xy}^2}(c_1|v|^2v+c_2v\mathcal{K}^{-1}\times(\partial_x^2+m\partial_y^2)|v|^2)(t')\mathrm{d}t'\right\|_{L_y^{\infty}L_T^2L_x^2}$$
$$\leqslant cT\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{H_{xy}^3}^2\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{H_{xy}^5}^{+}c\|v\|_{L_y^1L_T^{\infty}L_x^{\infty}}^2\left\|\partial_x^{k+1}v\right\|_{L_y^{\infty}L_T^2L_x^2}$$
$$+\|\partial_xv\|_{L_y^1L_T^{\infty}L_x^{\infty}}^2\left\|\partial_x^kv\right\|_{L_y^{\infty}L_T^2L_x^2}. \tag{2.3.38}$$

证明 为使记法更简单, 我们假设 (不失一般性)$c_1=c_2=m=1$. 因此

$$\left\|\partial_x^{k+1}\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial_{xy}^2}(|v|^2v+v\mathcal{K}^{-1}\times(\partial_x^2+\partial_y^2)|v|^2)(t')\mathrm{d}t'\right\|_{L_y^{\infty}L_T^2L_x^2}$$
$$\leqslant\left\|\partial_x^{k+1}\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial_{xy}^2}(|v|^2v)(t')\mathrm{d}t'\right\|_{L_y^{\infty}L_T^2L_x^2}$$
$$+\left\|\partial_x^{k+1}\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial_{xy}^2}(v\mathcal{K}^{-1}\times\partial_y^2|v|^2)(t')\mathrm{d}t'\right\|_{L_y^{\infty}L_T^2L_x^2}$$
$$+\left\|\partial_x^{k+1}\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial_{xy}^2}(v\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2)(t')\mathrm{d}t'\right\|_{L_y^{\infty}L_T^2L_x^2}$$
$$\equiv A_1+A_2+A_3. \tag{2.3.39}$$

再应用式 (2.3.15) 描述的群 $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ 的估计、Minkowski 积分不等式以及估计 (2.3.34), 可得到

$$A_1\leqslant c\int_0^T\left\|D_x^{k+1/2}(|v|^2v)\right\|_{L_x^2L_y^2}(t)\mathrm{d}t\leqslant c\int_0^T\left(\|v\|_{L_x^{\infty}L_y^{\infty}}^2\|v\|_{H_{xy}^2}\right)(t)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant cT\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{L_x^{\infty}L_y^{\infty}}^2\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{H_{xy}^s}. \tag{2.3.40}$$

为确定 A_2 的上界, 由于 $\partial_{xy}^2 v\mathcal{K}^{-1}$ ≡identity, 有下式

$$\partial_x^k\left(v\mathcal{K}^{-1}\partial_y^2|v|^2\right)=\partial_x^k v\mathcal{K}^{-1}\partial_y^2|v|^2+\sum_{j=0}^{k-1}m_j\partial_x^j v\partial_x^{k-j-1}\partial_y|v|^2$$
$$=\partial_x^k v\mathcal{K}^{-1}\partial_y^2|v|^2+B_1.$$

由式 (2.3.15) 及 Minkowski 积分不等式便可有

$$A_2\leqslant c\int_0^T\left\|D_x^{1/2}(\partial_x^k v\mathcal{K}^{-1}\partial_y^2|v|^2)\right\|_{L_x^2L_y^2}(t)\mathrm{d}t+c\int_0^T\left\|D_x^{1/2}B_1\right\|_{L_x^2L_y^2}(t)\mathrm{d}t,\quad(2.3.41)$$

上式右端第二项的估计方法和式 (2.3.40) 一样. 应用式 (2.3.36), 式 (2.3.37), 式 (2.3.32) 及式 (2.3.35) 又可得到式 (2.3.41) 右边第一项的估计

$$\begin{aligned}&\int_0^T\left\|D_x^{1/2}(\partial_x^k v\mathcal{K}^{-1}\partial_y^2|v|^2)\right\|_{L_x^2L_y^2}(t)\mathrm{d}t\\
\leqslant&c\int_0^T\left(\left\|\mathcal{K}^{-1}\partial_y^2|v|^2\right\|_{L_x^2L_y^2}+\left\|\mathcal{K}^{-1}D_x^{1/2}\partial_y^2|v|^2\right\|_{L_x^\infty L_y^\infty}\right)\|v\|_{H_{xy}^s}(t)\mathrm{d}t\\
\leqslant&c\int_0^T\left(\left\|\partial_y^2|v|^2\right\|_{L_x^1L_y^1}+\left\|D_x^{1/2}\partial_y^2|v|^2\right\|_{L_x^1L_y^1}\right)\|v\|_{H_{xy}^s}(t)\mathrm{d}t\\
\leqslant&c\int_0^T\left(\|v\|_{H_{xy}^3}^2\|v\|_{H_{xy}^s}\right)(t)\mathrm{d}t\leqslant cT\sup_{[0,T]}\|v\|_{H_{xy}^3}^2\sup_{[0,T]}\|v\|_{H_{xy}^s}.\end{aligned}\quad(2.3.42)$$

最后我们考虑式 (2.3.39) 的项 A_3. 因为

$$\partial_x^k(v\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2)=v\partial_x^k\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2+k\partial_x^k v\partial_x^{k-1}\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2+B_2,\quad(2.3.43)$$

这里 $B_2=\sum_{j=2}^{k}\tilde{m}_j\partial_x^j v\partial_x^{k-j}\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2$ 由式 (2.3.15) 和式 (2.3.19) 我们有

$$\begin{aligned}A_{.3}\leqslant&\left\|\partial_x\int_0^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial_{xy}^2}\left(v\partial_x^k\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2+k\partial_x^v\partial_x^{k-1}\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2\right)(t')\mathrm{d}t'\right\|_{L_y^\infty L_T^2L_x^2}\\
&+\left\|D_x^{1/2}\int_0^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial_{xy}^2}D_x^{1/2}B_2(t')\mathrm{d}t'\right\|_{L_y^\infty L_T^2L_x^2}\\
\leqslant&c\left\{\left\|v\partial_x^k\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2\right\|_{L_y^1L_T^2L_x^2}\right.\\
&\left.+\left\|\partial_x^v\partial_x^{k-1}\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2\right\|_{L_y^1L_T^2L_x^2}+\int_0^T\left\|D_x^{1/2}B_2(t)\right\|_{L_x^2L_y^2}\mathrm{d}t\right\}.\end{aligned}\quad(2.3.44)$$

结合应用 Minkowski 积分不等式和估计 (2.3.33), (2.3.35), 容易得到以下不等式

$$\begin{aligned}\left\|v\partial_x^k\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2\right\|_{L_y^1L_T^2L_x^2}&\leqslant c\|v\|_{L_y^1L_T^\infty L_x^\infty}\left\|\partial_x^k\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2\right\|_{L_y^\infty L_T^2L_x^2}\\&\leqslant c\|v\|_{L_y^1L_T^\infty L_x^\infty}\left\|\partial_x^{k+1}\partial_x\mathcal{K}^{-1}|v|^2\right\|_{L_T^2L_y^\infty L_x^2}\\&\leqslant c\|v\|_{L_y^1L_T^\infty L_x^\infty}\left\|\partial_x^{k+1}|v|^2\right\|_{L_T^2L_y^1L_x^2}\\&\leqslant c\|v\|_{L_y^1L_T^\infty L_x^\infty}\left\|\partial_x^{k+1}|v|^2\right\|_{L_y^1L_T^2L_x^2}\\&\leqslant c\|v\|_{L_y^1L_T^\infty L_x^\infty}\left\|\|\cdot\|\,v\|_{L_x^\infty}\left\|\partial_x^{k+1}v\right\|_{L_x^2}\right\|_{L_y^1L_T^2}\\&\leqslant c\|v\|_{L_y^1L_T^\infty L_x^\infty}^2\left\|\partial_x^{k+1}v\right\|_{L_y^\infty L_T^2L_x^2}.\end{aligned}\tag{2.3.45}$$

同理有

$$\left\|\partial_xv\partial_x^{k-1}\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2\right\|_{L_y^1L_T^2L_x^2}\leqslant c\|\partial_xv\|_{L_y^1L_T^\infty L_x^\infty}^2\left\|\partial_x^kv\right\|_{L_y^\infty L_T^2L_x^2}.\tag{2.3.46}$$

另外, 使用式 (2.3.36), 式 (2.3.32), 式 (2.3.37) 和式 (2.3.35) 有

$$\begin{aligned}&\int_0^T\left\|D_x^{1/2}\left(\partial_x^jv\partial_x^{k-j}\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2\right)(t)\right\|_{L_x^2L_y^2}\mathrm{d}t\\\leqslant&c\int_0^T\left(\left\|D_x^{1/2}\partial_x^jv\right\|_{L_x^2L_y^2}\left\|\partial_x^{k-j}\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2\right\|_{L_x^\infty L_y^\infty}\right.\\&\left.+\left\|\partial_x^jv\right\|_{L_x^2L_y^2}\left\|D_x^{1/2}\partial_x^{k-j}\kappa^{-1}\partial_x^2|v|^2\right\|_{L_x^\infty L_y^\infty}\right)\mathrm{d}t\\\leqslant&c\int_0^T\left(\left\|D_x^{1/2}\partial_x^jv\right\|_{L_x^2L_y^2}\left\|\partial_x^{k-j+2}|v|^2\right\|_{L_x^1L_y^1}\right.\\&\left.+\left\|\partial_x^jv\right\|_{L_x^2L_y^2}\left\|D_x^{1/2}\partial_x^{k-j+2}|v|^2\right\|_{L_x^1L_y^1}\right)\mathrm{d}t\\\leqslant&c\int_0^T\left(\|v\|_{H_{xy}^3}^2\|v\|_{H_{xy}^s}\right)(t)\,\mathrm{d}t\leqslant cT\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{H_{xy}^3}^2\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{H_{xy}^s}.\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^T\left\|D_x^{1/2}B_2\right\|_{L_x^2L_y^2}^2\mathrm{d}t\leqslant cT\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{H_{xy}^3}^2\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{H_{xy}^s}.\tag{2.3.47}$$

综合式 (2.3.40)~ 式 (2.3.47) 得到 A_3 的有界性, 分别将 A_1, A_2, A_3 代入式 (2.3.39) 可得到式 (2.3.38), 命题得证.

命题 2.3.12 若 $k=s-1/2\in Z(k>3)$, 那么

$$\begin{aligned}&\sup_{[0,T]}\left\|\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial_{xy}^2}\left(c_1|v|^2v+c_2v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2\right)(t')\,\mathrm{d}t'\right\|_{H_{xy}^s}\\ \leqslant & cT\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{H_{xy}^3}^2\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{H_{xy}^s}+c\|v\|_{L_y^1L_T^\infty L_x^\infty}^2\left\|\partial_x^{k+1}v\right\|_{L_y^\infty L_T^2L_x^2}\\ &+c\|\partial_xv\|_{L_y^1L_T^\infty L_x^\infty}^2\left\|\partial_x^kv\right\|_{L_y^\infty L_T^2L_x^2}.\end{aligned}\tag{2.3.48}$$

证明 利用群的性质用式 (2.3.15)、式 (2.3.19) 代替式 (2.3.16) 讨论最高导数项, 对最低阶导数较简单且类似下面的结果, 这里忽略.

命题 2.3.13

$$\begin{aligned}&\sup_{[0,T]}\left\|\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial_{xy}^2}\left(c_1\|v\|^2v+c_2v\mathcal{K}^{-1}\times\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2\right)(t')\,\mathrm{d}t'\right\|_{H_{xy}^3(r^2)}\\ \leqslant & cT\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{H_{xy}^3(r^2)}\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{H_{xy}^5}^2\\ &+cT^2\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{H_{xy}^3}^2\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{H_{xy}^6}.\end{aligned}\tag{2.3.49}$$

$\|\cdot\|_{H_{xy}^k(r^l)}$ 范数表达式:

$$\|f\|_{H_{xy}^k(r^l)}\equiv\sum_{|\alpha|\leqslant k}\left(\int_{\mathbf{R}^2}\left|\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}f(x,y)\right|^2r^l\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2},$$

其中 $r=\left(x^2+y^2\right)^{1/2}$.

证明 把 x 和 y 对调, 结合 Minkowski 积分不等式、等式

$$y\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}f=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}yf-\mathrm{i}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}\partial_xf$$

和群的性质, 估计 (2.3.32)~(2.3.33) 及式 (2.3.35), 不难发现当 $|\alpha|\leqslant 3$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\sup_{[0,T]}\left\|r\int_0^T \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial_{xy}^2}\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}\left(c_1|v|^2v+c_2v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2\right)(t')\,\mathrm{d}t'\right\|_{L_x^2L_y^2}\\ \leqslant&\sup_{[0,T]}\int_0^T\left\|x\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial_{xy}^2}\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}(\cdot)(t')\right\|_{L_x^2L_y^2}\mathrm{d}t'\\ &+\sup_{[0,T]}\int_0^T\left\|y\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial_{xy}^2}\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}(\cdot)(t')\right\|_{L_x^2L_y^2}\mathrm{d}t'\\ \leqslant& c\int_0^T\|x\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}(\cdot)(t')\|_{L_x^2L_y^2}\,\mathrm{d}t'+c\int_0^T\|\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2+1}(\cdot)(t')\|_{L_x^2L_y^2}\,\mathrm{d}t'\end{aligned}$$

$$+c\int_0^T \| y\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}(\cdot)(t') \|_{L_x^2L_y^2}\,\mathrm{d}t' + c\int_0^T \| \partial_x^{\alpha_1+1}\partial_y^{\alpha_2}(\cdot)(t') \|_{L_x^2L_y^2}\,\mathrm{d}t'$$
$$\leqslant cT\sup_{[0,T]} \| v(t) \|_{H^3_{xy}(r^2)} \sup_{[0,T]} \| v(t) \|^2_{H^5_{xy}} + cT^2\sup_{[0,T]} \| v(t) \|^2_{H^3_{xy}} \sup_{[0,T]} \| v(t) \|_{H^6_{xy}}.$$

本命题得证.

命题 2.3.14

$$\left\| \int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial^2_{xy}}\left(c_1|v|^2v + c_2v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2\right)(t')\,\mathrm{d}t' \right\|_{L^1_yL^\infty_TL^\infty_x}$$
$$\leqslant cT\left(1+T^2\right)\sup_{[0,T]} \| v(t) \|^2_{H^2_{xy}} \sup_{[0,T]} \| v(t) \|_{H^6_{xy}}$$
$$+ cT(1+T)\sup_{[0,T]} \| v(t) \|_{H^3_{xy}(r^2)} \sup_{[0,T]} \| v(t) \|^2_{H^5_{xy}}. \tag{2.3.50}$$

证明 利用 Minkowski 积分不等式, 式 (2.3.26)、式 (2.3.34)、式 (2.3.35) 及 Sobolev 空间理论得到

$$\left\| \int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial^2_{xy}}\left(c_1|v|^2v + c_2v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2\right)(t')\,\mathrm{d}t' \right\|_{L^1_yL^\infty_TL^\infty_x}$$
$$\leqslant \int_0^T \| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial^2_{xy}}(\cdot)(t') \|_{L^1_yL^\infty_TL^\infty_x}\mathrm{d}t'$$
$$= T\sup_{t'\in[0,T]} \| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial^2_{xy}}(\cdot) \|_{L^1_yL^\infty_TL^\infty_x}$$
$$\leqslant T \| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial^2_{xy}}(\cdot) \|_{L^1_yL'^\infty_tL^\infty_TL^\infty_x}$$
$$\leqslant cT\left(1+T^2\right) \| c_1|v|^2v + c_2v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2 \|_{H^4_{xy}}$$
$$+ cT(1+T) \| c_1|v|^2v + c_2v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2 \|_{H^3_{xy}(r^2)}$$
$$\leqslant cT\left(1+T^2\right)\sup_{[0,T]} \| v(t) \|^2_{L^\infty_xL^\infty_y} \sup_{[0,T]} \| v(t) \|_{H^4_{xy}}$$
$$+ cT\left(1+T^2\right) \| v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2 \|_{H^4_{xy}}$$
$$+ cT(1+T)\sup_{[0,T]} \| rv \|_{L^2_xL^2_y} \sup_{[0,T]} \| v(t) \|_{L^\infty_xL^\infty_y} \sup_{[0,T]} \| v(t) \|_{H^5_{xy}}$$
$$+ cT(1+T) \| v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2 \|_{H^3_{xy}(r^2)}. \tag{2.3.51}$$

从式 (2.3.35) 和式 (2.3.32) 不难看出

$$\| v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2 \|_{H^4_{xy}} \leqslant c\sup_{[0,T]} \| v(t) \|^2_{L^2_xL^2_y} \sup_{[0,T]} \| v(t) \|_{H^6_{xy}} \tag{2.3.52}$$

和

$$\| v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2 \|_{H^3_{xy}(r^2)} \leqslant c\sup_{[0,T]} \| v(t) \|_{H^3_{xy}(r^2)} \sup_{[0,T]} \| v(t) \|^2_{H^5_{xy}}. \tag{2.3.53}$$

将上面不等式 (2.3.52)~(2.3.53) 代入式 (2.3.51), 再应用 Sobolev 空间理论便可得到式 (2.3.50).

命题 2.3.15 若 $k=s-1/2\in Z(k>3)$ 那么有

$$\sup_{\alpha,\beta\in Z}\left(\int_0^T\int_{I_\beta}\int_{I_\alpha}\left|\partial_x^{k+1}\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\Delta}\left(c_1|v|^2v\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+c_2v\mathcal{K}^{-1}\times\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2\right)(t')\,\mathrm{d}t'\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant cT\sup_{[0,T]}\|v(t)\|^2_{H^3_{xy}}\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{H^s_{xy}}$$

$$+c\sum_{k\leqslant|\gamma|\leqslant k+1}\sup_\alpha\sup_\beta\left(\int_0^T\int_{I_\beta}\int_{I_\alpha}|\partial^\gamma_{x,y}v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\sum_{|l|\leqslant1}\left(\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\sup_{[0,T]}\sup_{Q_{\alpha,\beta}}|\partial^l_{x,y}v|\right)^2\equiv D. \tag{2.3.54}$$

其中, $Q_{\alpha,\ \beta}=I_\alpha\times I_\beta=[\alpha,\alpha+1]\times[\beta,\beta+1]\,(\alpha,\beta\in Z)$.

证明 不失一般性, 我们可设 $c_1=c_2=1$, 那么

$$\sup_{\alpha,\beta\in Z}\left(\int_0^T\int_{I_\beta}\int_{I_\alpha}\left|\partial_x^{k+1}\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\Delta}\left(|v|^2v\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+v\mathcal{K}^{-1}\times\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2\right)(t')\,\mathrm{d}t'\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant c\sup_{\alpha,\beta\in Z}\left(\int_0^T\int_{I_\beta}\int_{I_\alpha}\left|\partial_x^{k+1}\times\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\Delta}\left(|v|^2v\right)(t')\,\mathrm{d}t'\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+c\sup_{\alpha,\beta\in Z}\left(\int_0^T\int_{I_\beta}\int_{I_\alpha}\left|\partial_x^{k+1}\times\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\Delta}\left(v\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2\right)(t')\,\mathrm{d}t'\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+c\sup_{\alpha,\beta\in Z}\left(\int_0^T\int_{I_\beta}\int_{I_\alpha}\left|\partial_x^{k+1}\times\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\Delta}\left(v\mathcal{K}^{-1}\partial_y^2|v|^2\right)(t')\,\mathrm{d}t'\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\equiv\tilde{A}_1+\tilde{A}_2+\tilde{A}_3. \tag{2.3.55}$$

由群 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}\}_{-\infty}^{\infty}$ 估计的等价形式 (2.3.23)、Minkowski 不等式以及估计 (2.3.34), 可得到

$$\tilde{A}_1\leqslant c\int_0^T\|D_x^{k+1/2}\left(|v|^2v\right)\|_{L^2_xL^2_y}(t)\,\mathrm{d}t\leqslant c\int_0^T\|\tau\|_{L^\infty_xL^\infty_y}\|v\|_{H^s_{xy}}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant cT\sup_{[0,T]}\|v(t)\|^2_{L^\infty_xL^\infty_y}\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{H^s_{xy}}. \tag{2.3.56}$$

要确定 $\tilde{A}_2$ 的上界, 应注意到

$$\partial_x^k\left(v\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2\right)=v\partial_x^k\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2+k\partial_x v\partial_x^{k-1}\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2+\tilde{B}_1, \tag{2.3.57}$$

应用式 (2.3.56) 的处理方法 (基于估计 (2.3.23)) 和不等式 (2.3.32) 容易看出

$$\begin{aligned}&\sup_{\alpha,\beta\in Z}\left(\int_0^T\int_{I_\alpha}\int_{I_\beta}\left|D_x^{1/2}\times\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\Delta}D_x^{\frac{1}{2}}H_x\tilde{B}_1(t')\,\mathrm{d}t'\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leqslant & cT\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{H_{xy}^3}^2\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{H_{xy}^s},\end{aligned} \tag{2.3.58}$$

这里 H_x 表示关于变量 x 的 Hilbert 变换. 再利用式 (2.3.25) 处理式 (2.3.57) 右端第一项得

$$\begin{aligned}&\sup_{\alpha,\beta\in Z}\left(\int_0^T\int_{I_\alpha}\int_{I_\beta}\left|\partial_x\times\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\Delta}\left(v\partial_x^k\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2\right)(t')\,\mathrm{d}t'\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leqslant & c\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T\int_{I_\alpha}\int_{I_\beta}|\left(v\partial_x^k\mathcal{K}^{-1}\partial_x^2|v|^2\right)(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leqslant & c\left(\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\sup_{[0,T]}\sup_{x\in I_\alpha}\sup_{y\in I_\beta}|v|\right)\times\sup_\alpha\sup_\beta\left(\int_0^T\int_{I_\beta}\int_{I_\alpha}|\mathcal{K}^{-1}\partial_x^{k+2}|v|^2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{2.3.59}$$

结合应用 (2.3.33) 的证明方法和与估计 (2.3.35) 对应的等价形式可得

$$\begin{aligned}&\left(\int_{I_\beta}\int_{I_\alpha}\int_0^T|\mathcal{K}^{-1}\partial_x\partial_x^{k+1}|v|^2|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sup_{y\in I_\beta}\left(\int_{I_\alpha}\int_0^T|\partial_x\mathcal{K}^{-1}\partial_x^{k+1}|v|^2|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leqslant&\sup_{y\in R}\left(\int_{I_\alpha}\int_0^T\left(\int_y^\infty|\partial_x^{k+1}|v|^2|\mathrm{d}y'\right)^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leqslant&\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{I_\alpha}\int_0^T|\partial_x^{k+1}|v|^2|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\\ \leqslant&\sum_{\beta'=-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T\int_{I'_\beta}\int_{I_\alpha}|\partial_x^{k+1}|v|^2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\ =&c\sum_{\beta'=-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T\int_{I'_\beta}\sup_{x\in I_\alpha}|v|^2\left(\int_{I_\alpha}|v|^2\mathrm{d}x+\int_{I_\alpha}|\partial_x^{k+1}v|^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leqslant&c\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\sup_{[0,T]}\sup_{y\in I'_\beta}\sup_{x\in I_\alpha}|v|\left\{\int_0^T\int_{I'_\beta}\int_{I_\alpha}|v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{I'_\beta}\int_{I_\alpha}|\partial_x^{k+1}v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\leqslant cT^{1/2}\left(\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\sup_{[0,T]}\sup_{y\in I_\beta}\sup_{x\in I_\alpha}|v|\right)^2$$

$$+c\sup_\alpha\sup_\beta\left(\int_0^T\int_{I_\beta}\int_{I_\alpha}|\partial_x^{k+1}v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\sup_{[0,T]}\sup_{y\in I_\beta}\sup_{x\in I_\alpha}|v|\right). \quad (2.3.60)$$

将式 (2.3.60) 代入式 (2.3.59) 可得到式 (2.3.57) 右端第一项的上界, 同理可得第二项的上界.

最后考虑 $\tilde{A}_3$ 的界.

因为

$$\partial_{xy}^2 A^{-1}\equiv \text{identity},$$

$$\begin{aligned}\partial_x^k\left(v\mathcal{K}^{-1}\partial_y^2|v|^2\right)&=\partial_x^k v\mathcal{K}^{-1}\partial_y^2|v|^2+\sum_{j=0}^{k-1}m_j\partial_x^j v\partial_x^{k-j-1}\partial_y|v|^2\\&=\partial_x^k v\mathcal{K}^{-1}\partial_y^2|v|^2+\tilde{B}_2.\end{aligned}$$

由光滑估计 (2.3.23) 和式 (2.3.56)、式 (2.3.58) 的相似形式便可推出

$$\begin{aligned}\tilde{A}_3&\leqslant\int_0^T\left(\| D_x^{1/2}\partial_x^k\left(v\mathcal{K}^{-1}\partial_y^2|v|^2\right)\|_{L_x^2L_y^2}+\| D_x^{1/2}\tilde{B}_2\|_{L_x^2L_y^2}\right)(t)\,\mathrm{d}t\\&\leqslant cT\sup_{[0,T]}\| v(t)\|_{H_{xy}^3}^2\sup_{[0,T]}\| v(t)\|_{H_{xy}^s}.\end{aligned}\quad (2.3.61)$$

综合这三项上界估计可得出式 (2.3.54).

命题 2.3.16 若 $k=s-1/2\in z(k\geqslant 3)$ 那么有

$$\sup_{[0,T]}\left\|\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\Delta}\left(c_1|v|^2v+c_2v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2\right)(t')\,\mathrm{d}t'\right\|_{H_{xy}^s}\leqslant D,\quad (2.3.62)$$

其中 D 由式 (2.3.54) 定义.

证明 式 (2.3.62) 的部分证明涉及最高阶导数项, 尽管它与式 (2.3.54) 的证明方法类似, 但我们却不考虑使用式 (2.3.23) 和式 (2.3.25), 而是使用式 (2.3.24) 和群的一些性质. 最低导数项方法就是群性质的一个直接应用.

命题 2.3.17

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\sup_{[0,T]}\sup_{Q_{\alpha,\ \beta}}\times\left|\int_0^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\Delta}\left(c_1|v|^2v+c_2v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2\right)(t')\,\mathrm{d}t'\right|\\&\leqslant cT\left(1+T^5\right)\left(1+T^3\right)\sup_{[0,T]}\| v(t)\|_{H_{xy}^{11}}^3+\sup_{[0,T]}\| v(t)\|_{H_{xy}^6(r^6)}\sup_{[0,T]}\| v(t)\|_{H_{xy}^{11}}^2,\end{aligned}$$

(2.3.63)

其中 $Q_{\alpha,\beta}=I_\alpha\times I_\beta=[\alpha,\alpha+I]\times[\beta,\beta+I]$.

证明　由 Minkowski 不等式和式 (2.3.29) 有

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\sup_{[0,T]}\sup_{Q_{\alpha,\ \beta}}\times\left|\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\Delta}\left(c_1|v|^2v+c_2v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2\right)(t')\,\mathrm{d}t'\right|\\&\leqslant c\left(1+T^5\right)\left\{\int_0^T\|\,|v|^2v\,\|_{H^6_{xy}}\mathrm{d}t+\int_0^T\|\,v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2\,\|_{H^6_{xy}}\,\mathrm{d}t\right.\\&\quad\left.+\int_0^T\|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t'\Delta}|v|^2v\,\|_{H^6_{xy}(r^6)}\,\mathrm{d}t'\int_0^T\|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t'\Delta}v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2\,\|_{H^6_{xy}(r^6)}\,\mathrm{d}t'\right\}\\&\equiv M_1+M_2+M_3+M_4.\end{aligned}\tag{2.3.64}$$

又由式 (2.3.35) 得

$$M_1\leqslant cT\left(1+T^5\right)\sup_{[0,T]}\|\,v\,\|^2_{L_x^\infty L_y^\infty}\sup_{[0,T]}\|\,v(t)\,\|_{H^6_{xy}}\tag{2.3.65}$$

和

$$\begin{aligned}M_3\leqslant&cT\left(1+T^5\right)\left\{\sup_{[0,T]}\|\,v\,\|_{H^6_{xy}(r^6)}\sup_{[0,T]}\|\,v(t)\,\|^2_{H^{11}_{xy}}\right\}\\&+\left(1+T^3\right)\sup_{[0,T]}\|\,v(t)\,\|^2_{H^6_{xy}}\sup_{[0,T]}\|\,v(t)\,\|_{H^{11}_{xy}}.\end{aligned}\tag{2.3.66}$$

类似于式 (2.3.32) 和式 (2.3.35), 易得出

$$M_2\leqslant cT\left(1+T^5\right)\sup_{[0,T]}\|\,v\,\|^2_{H^4_{xy}}\sup_{[0,T]}\|\,v(t)\,\|_{H^8_{xy}}\tag{2.3.67}$$

和

$$\begin{aligned}M_4\leqslant&cT\left(1+T^5\right)\left\{\sup_{[0,T]}\|\,v\,\|_{H^6_{xy}(r^6)}\sup_{[0,T]}\|\,v(t)\,\|^2_{H^{11}_{xy}}\right\}\\&+\left(1+T^3\right)\sup_{[0,T]}\|\,v(t)\,\|^2_{H^6_{xy}}\sup_{[0,T]}\|\,v(t)\,\|_{H^{11}_{xy}}.\end{aligned}\tag{2.3.68}$$

将式 (2.3.65)~ 式 (2.3.68) 用于式 (2.3.64), 再使用 Sobolev 定理便可得到式 (2.3.63).

命题 2.3.18

$$\begin{aligned}&\sup_{[0,T]}\left\|\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\Delta}\left(c_1|v|^2v+c_2vh^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2\right)(t')\,\mathrm{d}t'\right\|_{H^6_{xy}(r^6)}\\&\leqslant cT\left(1+T^3\right)\left\{\sup_{[0,T]}\|\,v(t)\,\|_{H^6_{xy}(r^6)}\times\sup_{[0,T]}\|\,v(t)\,\|^2_{H^1_{xy}}+\sup_{[0,T]}\|\,v(t)\,\|^3_{H^{11}_{xy}}\right\}.\end{aligned}\tag{2.3.69}$$

证明　该命题证明方法与命题 2.3.11 的证明方法类似, 故省去.

2.3.3 定理 2.3.1 的证明

固定 s 使得 $s-1/2=k\in Z$, 假设 $k\geqslant 6$, 对 $v\in L^{\infty}\left([0,T]:H^{S}\left(\mathbf{R}^2\right)\right)$, 定义:

$$\begin{aligned}\lambda_1^T(v)=&\|\partial_x^{k+1}v\|_{L_y^{\infty}L_T^2L_x^2}+\|\partial_x^k v\|_{L_y^{\infty}L_T^2L_x^2}\\&+\|\partial_y^{k+1}v\|_{L_x^{\infty}L_T^2L_y^2}+\|\partial_y^k v\|_{L_x^{\infty}L_T^2L_y^2},\end{aligned}\tag{2.3.70}$$

$$\lambda_2^T(v)=\sup_{[0.T]}\|v(t)\|_{H_{xy}^s},\tag{2.3.71}$$

$$\lambda_3^T(v)=\sup_{[0.T]}\|v(t)\|_{H_{xy}^3(r^2)},\tag{2.3.72}$$

$$\lambda_4^T(v)=\|v\|_{L_y^1L_T^{\infty}L_x^{\infty}}+\|\partial_x v\|_{L_y^1L_T^{\infty}L_x^{\infty}}+\|v\|_{L_x^1L_T^{\infty}L_y^{\infty}}+\|\partial_y v\|_{L_x^1L_T^{\infty}L_y^{\infty}},\tag{2.3.73}$$

$$\wedge_T(v)=\max_{j=1,\cdots,4}\lambda_j^T(v),\tag{2.3.74}$$

$$X_T=\left\{v\in L^{\infty}\left([0,T]:H^S\left(\mathbf{R}^2\right)\bigcap H^3\left(\mathbf{R}^2:r^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\right)/\wedge_T(v)<\infty\right\}.$$

对于初值 $u_0\in H^s(\mathbf{R}^2)\cap H^3(\mathbf{R}^2:r^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$, 记 $\varPhi_{u_0}(v)=u$ 为以下线性 IVP 的解

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\partial_t u-\partial_{xy}^2 u=c_1|v|^2v+c_2v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2,\\&u(x,y,0)=u_0(x,y),\end{aligned}\tag{2.3.75}$$

其中, $v\in X_T^a=\{v\in X_T/\wedge_T(v)\leqslant a\}$.

现在证明存在 $\delta>0$, 使当

$$\delta_0=\|u_0\|_{H_{xy}^s}+\|u_0\|_{H_{xy}^3(r^2)}<\delta$$

时, 存在 $T>0$, $a>0$(当 $\delta_0\to 0$ 时 $T=T(\delta_0)\to\infty$) 使若 $v\in X_T^a$ 必有 $u=\varPhi_{u_0}(v)\in X_T^a$, 且

$$\varPhi\colon X_T^a\to X_T^a$$

是收缩的. 因此可以考虑将式 (2.3.75) 变形为积分方程的形式

$$\varPhi_{u_0}(v)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}u_0+\int_0^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(t-t'\right)\partial_{xy}^2}\left(c_1|v|^2v+c_2vh^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2\right)(t')\,\mathrm{d}t'.\tag{2.3.76}$$

结合式 (2.3.15)、式 (2.3.17) 和 Sobolev 空间理论可得

$$\lambda_1^T\left(\varPhi_{u_0}(v)\right)\leqslant\delta_0+cT\left(\lambda_2^T(v)\right)^3+c\lambda_1^T(v)\left(\lambda_4^T(v)\right)^2.\tag{2.3.77}$$

同理, 由群的性质和式 (2.3.48) 有

$$\lambda_2^T\left(\varPhi_{u_0}(v)\right)\leqslant\delta_0+cT\left(\lambda_2^T(v)\right)^3+c\lambda_1^T(v)\left(\lambda_4^T(v)\right)^2.\tag{2.3.78}$$

由式 (2.3.49)

$$\lambda_3^T\left(\varPhi_{u_0}(v)\right) \leqslant \delta_0 + cT\left(\lambda_2^T(v)\right)^2 \lambda_3^T(v) + cT^2\left(\lambda_2^T(v)\right)^3. \tag{2.3.79}$$

由式 (2.3.26), 式 (2.3.50)

$$\lambda_4^T\left(\varPhi_{u_0}(v)\right) \leqslant c\left(1+T^2\right)\delta_0 + cT\left(1+T^2\right)\left\{\left(\lambda_2^T(v)\right)^3 + \left(\lambda_2^T(v)\right)^2 \lambda_3^T(v)\right\}. \tag{2.3.80}$$

由式 (2.3.77)~ 式 (2.3.80), 则由

$$\wedge_T\left(\varPhi_{u_0}(v)\right) \leqslant c\left(1+T^2\right)\delta_0 + c\left(1+T^2\right)\left(\wedge_T(v)\right)^3. \tag{2.3.81}$$

记 $a = 2c\left(1+T^2\right)\delta_0$, 取合适的值 T, 满足

$$8c^3\left(1+T^2\right)^3\delta_0^2 \leqslant 1/2. \tag{2.3.82}$$

同理, 由式 (2.3.77)~ 式 (2.3.80) 有

$$\wedge_T\left(\varPhi_{u_0}(v) - \varPhi_{u_0}(\tilde{v})\right) \leqslant c\left(1+T^2\right)\left\{\left(\wedge_T(v)\right)^2 + \left(\wedge_T(\tilde{v})\right)^2\right\}\left(\wedge_T(v-\tilde{v})\right)^3 \tag{2.3.83}$$

和

$$\begin{aligned}
&\wedge_{T_0}\left(\varPhi_{u_0}(v) - \varPhi_{\tilde{u}_0}(\tilde{v})\right) \\
\leqslant & c\left(1+T_0^2\right)|||u_0-\tilde{u}_0||| \\
&+ c\left(1+T_0^2\right)\left\{\left(\wedge_{T_0}(v)\right)^2 + \left(\wedge_{T_0}(\tilde{v})\right)^2\right\}\left(\wedge_{T_0}(v-\tilde{v})\right),
\end{aligned} \tag{2.3.84}$$

这里 $T_0 \in (0,T)$, $|||u_0-\tilde{u}_0||| = ||u_0-\tilde{u}_0||_{H^s_{xy}} + ||u_0-\tilde{u}_0||_{H^3_{xy}(r^2)}$ 要足够小.

因此, 对于上面的 a, T 有 $\varPhi_{u_0}(X_T^a) \in X_T^a$ 且 $\varPhi_{u_0}|_{X_T^a}$ 是收缩的. 这样, 存在唯一的 $u \in X_T^a$ 使得 $\varPhi_{u_0}(u) = u$, 即

$$u(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}u_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\partial_{xy}^2}\left(c_1|u|^2u + c_2u\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2 + m\partial_y^2\right)|u|^2\right)(t')\,\mathrm{d}t'. \tag{2.3.85}$$

应用式 (2.3.77) 的推导方法和式 (2.3.85) 得到

$$\lambda_1^T(u) \leqslant c\lambda_1^T\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}u_0\right) + cT\left(\lambda_2^T(u)\right)^3 + c\lambda_1^T(u)\left(\lambda_4^T(u)\right)^2.$$

因为当 $T\to 0$ 时 $\lambda_1^T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\partial_{xy}^2}u_0) = o(1)$, 故 $T\to 0$ 时 $\lambda_1^T(u) - o(1)$.

由式 (2.3.78)~ 式 (2.3.79) 及式 (2.3.85), 可得

$$u \in C\left([0,T] : H^s\left(\mathbf{R}^2\right) \cap H^3\left(\mathbf{R}^2 : r^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\right).$$

应用连续性不难把这种唯一性推广到族 $X_T \cap C([0,T] : H^s(\mathbf{R}^2) \cap H^3\left(\mathbf{R}^2 : r^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right))$, 到此, 全部完成了定理 2.3.1 的证明.

2.3.4 定理 2.3.2 的证明

如定理 2.3.1 的证明那样, 固定 s 使得 $s-1/2=k\in Z(k\geqslant 12)$, 注意这种假设并没有失去其一般性. 对 $v\in L^{\infty}\left([0,T]:H^{S}\left(\mathbf{R}^{2}\right)\right)$, 定义

$$\omega_1^T=\sup_{k\leqslant|\gamma|\leqslant k+1}\sup_{\alpha,\beta\in Z}\left(\int_0^T\int_{I_\beta}\int_{I_\alpha}|\partial_{x.y}^{\gamma}v\left(x,y,t\right)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{1/2}, \tag{2.3.86}$$

$$\omega_2^T\left(v\right)=\sup_{[0,T]}\|\,v\left(t\right)\|_{H_{xy}^s}, \tag{2.3.87}$$

$$\omega_3^T\left(v\right)=\sup_{[0,T]}\|\,v\left(t\right)\|_{H_{xy}^6(r^6)}, \tag{2.3.88}$$

$$\omega_4^T\left(v\right)=\sum_{|\gamma|\leqslant 1}\sum_{\alpha,\beta=-\infty}\sup_{[0,T]}\sup_{\alpha,\beta\in Z}|\partial_{x.y}^{\gamma}v\left(x,y,t\right)|, \tag{2.3.89}$$

$$\Omega_T\left(v\right)=\max_{j=1,\cdots,4}\omega_j^T\left(v\right), \tag{2.3.90}$$

$$Z_T=\left\{v\in L^{\infty}\left([0,T]:H^s\left(\mathbf{R}^2\right)\cap H^6\left(\mathbf{R}^2:r^6\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\right)/\Omega_T\left(v\right)<\infty\right\}.$$

对任意的 $u_0\in H^s\left(\mathbf{R}^2\right)\cap H^6\left(\mathbf{R}^2:r^6\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$, 记 $\psi_{u_0}\left(v\right)=u$ 为下面这个初值问题的解

$$\begin{cases}\mathrm{i}\partial_t u-\Delta u=c_1|v|^2v+c_2v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+\partial_y^2\right)|v|^2,\\ u\left(x,y,0\right)=u_0\left(x,y\right),\end{cases} \tag{2.3.91}$$

其中, $Z_T^a=\left\{v\in Z_T/\Omega_T\left(v\right)\leqslant a\right\}$.

要证明存在 $\delta>0$, 使当

$$\delta_0=\|\,u_0\,\|_{H_{xy}^s}+\|\,u_0\,\|_{H_{xy}^3(r^2)}<\delta$$

时, 存在 $T>0$, $a>0$(当 $\delta_0\to 0$ 时 $T(\delta_0)\to\infty$) 使若 $v\in Z_T^a$ 必有 $u=\Psi_{u_0}(v)\in Z_T^a$, 且

$$\Psi:Z_T^a\to Z_T^a$$

是收缩的. 像定理 2.3.1 的证明一样, 把式 (2.3.91) 写成积分方程的形式

$$\Psi_{u_0}\left(v\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}u_0+\int_0^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(t-t'\right)\Delta}\left(c_1|v|^2v+c_2v\mathcal{K}^{-1}\left(\partial_x^2+m\partial_y^2\right)|v|^2\right)\left(t'\right)\mathrm{d}t'. \tag{2.3.92}$$

由式 (2.3.23) 和式 (2.3.54) 可得到

$$\omega_1^T\left(\Psi_{u_0}\left(v\right)\right)\leqslant c\delta_0+cT\left(\omega_2^T\left(v\right)\right)^3+c\omega_1^T\left(v\right)\left(\omega_4^T\left(v\right)\right)^4+cT^{1/2}\left(\omega_4^T\left(v\right)\right)^3. \tag{2.3.93}$$

由群的一些性质和式 (2.3.62), 即得

$$\omega_1^T\left(\Psi_{u_0}(v)\right) \leqslant c\delta_0 + cT\left(\omega_2^T(v)\right)^3 + c\omega_1^T(v)\left(\omega_4^T(v)\right)^4 + cT^{1/2}\left(\omega_4^T(v)\right)^3. \quad (2.3.94)$$

由式 (2.3.39) 有

$$\omega_3^T\left(\Psi_{u_0}(v)\right) \leqslant c\delta_0 + cT\left(1+T^3\right)\left\{\left(\omega_2^T(v)\right)^2\omega_3^T(v) + \left(\omega_2^T(v)\right)^3\right\}. \quad (2.3.95)$$

由式 (2.3.29) 和式 (2.3.63) 可得

$$\begin{aligned}\omega_4^T\left(\Psi_{u_0}(v)\right) \leqslant & c\left(1+T^5\right)\delta_0 + cT\left(1+T^5\right)\\ & \cdot\left\{\left(1+T^3\right)\left(\omega_2^T(v)\right)^3 + \left(\omega_2^T(v)\right)^2\omega_3^T(v)\right\}.\end{aligned} \quad (2.3.96)$$

使用式 (2.3.90) 表示, 综合应用式 (2.3.93)~ 式 (2.3.96) 推出

$$\Omega_T\left(\Psi_{u_0}(v)\right) \leqslant c\left(1+T^5\right)\delta_0 + c\left(1+T^8\right)\left(\Omega_T(v)\right)^3. \quad (2.3.97)$$

一旦得到估计 (2.3.97), 剩下的证明方法与定理 2.3.1 方法相似, 这里不再给出.

2.4　广义 DS 方程 (+,+) 型 Cauchy 问题

本节研究广义 Davey-Stewartson 方程:

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}u_t + \delta u_{xx} + u_{yy} = \lambda|u|^2u + b_1uv_x,\\ &v_{xx} + mv_{yy} = \left(|u|^2\right)_x.\end{aligned} \quad (2.4.1)$$

$\delta > 0$ 和 $m > 0$ 时的 Cauchy 问题.

$$\begin{cases}\mathrm{i}u_t + \Delta u = a|u|^\alpha u - b_1uv_{x_1},\\ -\Delta v = b_2(|u|^2)_{x_1},\\ u(0,x) = u_0(x).\end{cases} \quad (2.4.2)$$

$u(t,x)$ 和 $v(t,x)(x=(x_1,\cdots,x_n))$ 分别为 $(t,x)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n$ 中的复值函数和实值函数, Δ 为关于 $\mathbf{R}^n$ 的 Laplace 算子, a, b_1, b_2 为实常数. 显而易见, 式 (2.4.2) 为 $\delta>0$ 和 $m>0$ 时式 (2.4.1) 的一般形式.

令 u, v 为式 (2.4.2) 的解. 从式 (2.4.2) 的第二个方程可得

$$v_{x_1} = -b_2\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\xi_1^2}{|\xi|^2}\Big)\mathcal{F}|u|^2. \quad (2.4.3)$$

为了简单起见, 记

$$E(\psi)=\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\xi_1^2}{|\xi|^2}\Big)\mathcal{F}\psi. \tag{2.4.4}$$

综合式 (2.4.2) 与式 (2.4.3), 可得

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t+\Delta u=\alpha|u|^\alpha u-b_1b_2E(|u|^2)u, \\ u(0,x)=u_0(x). \end{cases} \tag{2.4.5}$$

通过将式 (2.4.3) 变形, 很容易证明式 (2.4.5) 实质上等价于式 (2.4.2). 下面, 我们研究在二维和三维空间, 方程式 (2.4.5) 在 $H^s(1\leqslant s\leqslant 2)$ 的局部解和整体解的存在性.

首先叙述主要结果, 令

$$\alpha_s(n)=\begin{cases} \infty, & s\geqslant \dfrac{n}{2}, \\ \dfrac{4}{n-2s}, & 0\leqslant s<\dfrac{n}{2}. \end{cases} \tag{2.4.6}$$

定理 2.4.1 令 $n=2,$, $1\leqslant s\leqslant 2$, $u_0\in H^s$. 假设 $\alpha\in[1,\alpha_s(n))$. 那么方程 (2.4.5) 仅存在唯一解 u, 对于 $T^*\in(0,\infty]$, $r\in[2,2+\alpha_1(n))$, $\dfrac{2}{\gamma^{(r)}}=n\Big(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{r}\Big)$ 满足

$$u\in C_{\mathrm{loc}}(0,T^*;H^s)\cap L_{\mathrm{loc}}^{\gamma(r)}(0,T^*;H^{s,r}),$$

并且当 $T^*<\infty$ 时, $\lim\limits_{t\to T^*}\sup\|u(t)\|_{H^s}=\infty$.

定理 2.4.2 令 $n=2, 1\leqslant s\leqslant 2$ 且 $u_0\in H^s$. 假设下列条件之一成立:

(i) $a>0, 2<\alpha<\infty$;

(ii) $\alpha=2, a\geqslant\max(0,b_1b_2)$;

(iii) $\alpha=2, b_1b_2\geqslant 0, (b_1b_2-a)\|u_0\|_{L^2}^2<4$;

(iv) $\alpha=2, b_1b_2<0, -a\|u_0\|_{L^2}^2<4$;

(v) $1\leqslant\alpha<2, b_1b_2\|u_0\|_{L^2}^2<4$,

则 (2.4.5) 对于任何 $r\in[2,\infty)$, $\dfrac{2}{\gamma^{(r)}}=1-\dfrac{2}{r}$ 有唯一解

$$u\in C_{\mathrm{loc}}(0,\infty;H^s)\cap L_{\mathrm{loc}}^{\gamma(r)}(0,\infty;H^{s,r})\cap u\in C(0,\infty;H^1).$$

定理 2.4.3 令 $n=3, 1\leqslant s\leqslant 2$, 且 $u_0\in H^s$. 假设下列条件之一成立:

(i) $a>0, 2<\alpha<4$;

(ii) $\alpha=2, a>0, a\geqslant b_1b_2$,

则 (1.5) 对于任何 $r\in[2,6)\dfrac{2}{\gamma^{(r)}}=n\Big(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{r}\Big)$, 有唯一解

$$u\in C_{\mathrm{loc}}(0,\infty;H^s)\cap L_{\mathrm{loc}}^{\gamma(r)}(0,\infty;H^{s,r})\cap(0,\infty;H^1).$$

本文将利用 Lebesgue 空间 $L^r = L^r(\mathbf{R}^n)$; Bessel 位势空间 $H^{s,r} = H^{s,r}(\mathbf{R}^n)$, $H^s = H^{s,2}$; Riesz 位势空间 $\dot{H}^{s,r} = \dot{H}^{s,r}(\mathbf{R}^n), \dot{H}^s = \dot{H}^{s,2}$; Besov 空间 $B^s_{r,q} = B^s_{r,q}(\mathbf{R}^n), B^s_r = B^s_{r,2}$; 及齐次 Besov 空间 $\dot{B}^s_{r,q} = \dot{B}^s_{r,q}(\mathbf{R}^n), B^s_r = B^s_{r,2}$. 这些空间的定义允许 $1 < r, q < \infty, s \in \mathbf{R}$. 当 $s > 0$, 则有 $B^s_r = L^r \cap \dot{B}^s_r$, $H^{s,r} = L^r \cap \dot{H}^s_r$. 在 $\dot{B}^s_r$ 中范数的等价定义为

$$\|u\|_{\dot{B}^s_r} = \left(\int_0^\infty t^{-2(s-[s])} \sum_{|\alpha|=[s]} \sup \|\Delta_h D^\alpha u\|^2_{L^r} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.4.7}$$

其中, $[s]$ 代表小于或等于 s 的最大整数, $\Delta_h u(\cdot) = u(\cdot + h) - u(\cdot) = u_h - u$.

下面, C 代表仅仅取决于 $\mathbf{R}^n$ 的常数, 可以在不同处取不同的值. 对于任意 $r \in [1, \infty), r'$ 代表 r 的对偶数. 即 $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

线性 Schrödinger 方程在 Lebesgue-Besov 空间有如下估计:

命题 2.4.4 令 $S(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}$. 令 $s \in \mathbf{R}, 2 \leqslant r, \rho < 2 + \alpha_1(n)$, 同时令

$$\frac{2}{\gamma(\cdot)} = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\cdot}\right). \tag{2.4.8}$$

(i) 当 $\varphi \in \dot{H}^s$, 那么 $S(\cdot)\varphi \in L^{\gamma(r)}(\mathbf{R}, \dot{B}^s_r)$, 且存在一个常数 $C > 0$, 使得对于所有的 $\varphi \in \dot{H}^s$ 有

$$\|S(t)\varphi\|_{L^{\gamma(r)}(\mathbf{R}, \dot{B}^s)} \leqslant C\|\varphi\|_{\dot{H}^s}. \tag{2.4.9}$$

(ii) 当 $f \in L^{\gamma(r)'}(0, T; B'^s_r)$, 那么 $\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau \in L^{\gamma(\rho)}(0, T; \dot{B}^s_{r'})$, 且存在一个常数 $C > 0$, 使得对于所有的 $f \in L^{\gamma(r)'}(0, T; B'^s_r)$, 此处 $\frac{1}{\gamma(r)} + \frac{1}{\gamma(r)'} = 1$,

$$\left\| \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau \right\|_{L^{\gamma(\rho)}(0,T;\dot{B}^s_\rho)} \leqslant C \|f\|_{L^{\gamma(r)'}(0,T;\dot{B}^s_{r'})}. \tag{2.4.10}$$

定理的证明主要应用压缩映像原理, 为此, 我们首先给出非线性估计的一些结果.

引理 2.4.5 令 $1 \leqslant \lambda, \gamma, \rho < \infty, \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\rho}$

(i) 对任意的 $u \in H^{1,\rho}, v \in H^{1,\gamma}$ 有

$$\|uv\|_{H^{1,\lambda}} \leqslant C(\|u\|_{L^\rho}\|v\|_{H^{1,\gamma}} + \|u\|_{H^{1,\rho}}\|v\|_{L^\gamma}). \tag{2.4.11}$$

(ii) 令 $1 < s < 2$. 对所有的 $u \in B^s_\rho, v \in B^s_\gamma$ 有

$$\|uv\|_{B^s_\lambda} \leqslant C(\|u\|_{L^\rho}\|v\|_{B^s_\gamma} + \|u\|_{B^s_\rho}\|v\|_{L^\gamma} + \|u\|_{H^{1,\rho}}\|v\|_{B^{s-1}_\gamma} + \|u\|_{B^{s-1}_\rho}\|v\|_{H^{1,\gamma}}). \tag{2.4.12}$$

(iii) 对任意的 $u \in H^{2,\rho}, v \in H^{2,\gamma}$ 有

$$||uv||_{H^{2,\lambda}} \leqslant C(||u||_{L^\rho}||v||_{H^{2,\gamma}} + ||u||_{H^{2,\rho}}||v||_{L^r} + ||u||_{H^{1,\rho}}||v||_{H^{1,r}}). \tag{2.4.13}$$

证明 仅以 (ii) 为例. 有

$$||uv||_{\dot{B}^s_r} = \left(\int_0^\infty t^{-2(s-1)} \sum_{|\alpha|=1} \sup_{|h|\leqslant t} ||\Delta_h D^\alpha(uv)||^2_{L^\lambda} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4.14}$$

很容易得出

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=1} ||\Delta_h D^\alpha(uv)||_{L^\lambda} \leqslant & \sum_{|\alpha|=1} (||\Delta_h D^\alpha(uv)||_{L^\lambda} + ||u(\Delta_h D^\alpha v)||_{L^\lambda} \\ & + ||(D^\alpha u_h)\Delta_h v||_{L^\lambda} + ||(\Delta_h D^\alpha u)v||_{L^\lambda} \\ = & \sum_{|\alpha|=1} (\mathrm{I} + \cdots + \mathrm{IV}).\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

注意 $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\rho}$, 可得

$$I \leqslant ||\Delta_h u||_{L^\rho}||D^\alpha v||_{L^\gamma}, \tag{2.4.16}$$

$$II \leqslant ||u||_{L^\rho}||\Delta_h(D^\alpha v)||_{L^\gamma}, \tag{2.4.17}$$

$$III \leqslant ||D^\alpha u||_{L^\rho}||\Delta_h v||_{L^\gamma}, \tag{2.4.18}$$

$$IV \leqslant ||\Delta_h(D^\alpha u)||_{L^\rho}||v||_{L^\gamma}. \tag{2.4.19}$$

由式 (2.4.14)~ 式 (2.4.16) 得

$$||uv||_{\dot{B}^s_\lambda} \leqslant C(||u||_{L^\rho}||v||_{\dot{B}^s_\gamma} + ||u||_{\dot{B}^s_\rho}||v||_{L^\gamma} + ||u||_{\dot{H}^{1,\rho}}||v||_{\dot{B}^{s-1}_\gamma} + ||u||_{\dot{B}^{s-1}_\rho}||v||_{\dot{H}^{1,\gamma}}). \tag{2.4.20}$$

由 Hölder 不等式, 可得

$$||(uv)||_{L^\lambda} \leqslant ||u||_{L^\rho}||v||_{L^\gamma}. \tag{2.4.21}$$

联立式 (2.4.20) 及式 (2.4.21), 可知式 (2.4.12) 成立.

推论 2.4.6 令 $1 < s < 2$, 有

$$||uv||_{H^{1,4/3}} \leqslant C(||u||_{L^4}||v||_{H^1} + ||u||_{H^{2,4}}||v||_{L^2}), \tag{2.4.22}$$

$$||uv||_{H^{2,4/3}} \leqslant C(||u||_{L^4}||v||_{H^2} + ||u||_{H^{2,4}}||v||_{L^2} + ||u||_{H^{1,4}}||v||_{H^1}), \tag{2.4.23}$$

$$||uv||_{B^s_{4/3}} \leqslant C(||u||_{L^4}||v||_{H^s} + ||v||_{L^2}||u||_{B^s_4} + ||u||_{H^{1,4}}||v||_{H^{s-1}} + ||v||_{H^1}||u||_{B^{s-1}_4}). \tag{2.4.24}$$

证明　因为 $1/(4/3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, 很容易看出推论 2.4.6 是引理 2.4.5 的直接推论.

引理 2.4.7 (凸 Hölder 不等式)　假设 $1 < p_i, q_i \leqslant \infty, 0 \leqslant \theta_i \leqslant 1, \sigma_i, \sigma \in R (i = 1, \cdots, N)$, $\sum_{i=1}^N \theta_i = 1, \sigma \leqslant \sum_{i=1}^N \theta_i\sigma_i, 1/p = \sum_{i=1}^N \theta_i/p_i$, 且 $1/q = \sum_{i=1}^N \theta_i/q_i$. 则可得 $\bigcap_{i=1}^N B^{\sigma_i}_{p_i,q_i} \subset B^{\sigma}_{p,q}$, 对于所有的 $v \in \bigcap_{i=1}^N B^{\sigma_i}_{p_i,q_i}$ 有

$$||v||_{B^{\sigma}_{p,q}} \leqslant C \prod_{i=1}^N ||v||^{\theta_i}_{B^{\sigma_i}_{p_i,q_i}}. \tag{2.4.25}$$

注　如果分别用分数幂 Sobolev 空间 $H^{\sigma,p}$ 和 H^{σ_i,p_i} 代替 Besov 空间 $B^{\sigma}_{p,q}$ 和 $B^{\sigma_i}_{p_i,q_i}$, 也可得出类似的结果成立.

证明　令 $\sigma_0 = \sum_{i=1}^N \theta_i\sigma_i$, 由 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
||v||_{B^{\sigma_0}_{p,q}} = \left\{\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\sigma_0 q}||\varphi_j * v||^q_{L^p}\right\}^{1/q} &= \left\{\sum_{j=0}^{\infty} ||\prod_{i=1}^N [2^{j\sigma_i}(\varphi_j * v)]^{\theta_i}||^q_{L^p}\right\}^{1/q} \\
&\leqslant \left\{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^N ||2^{j\sigma_i}(\varphi_j * v)||^{\theta_i}_{L^p}\right)^q\right\}^{1/q} \\
&\leqslant \prod_{i=1}^N \left\{\sum_{j=0}^{\infty} ||2^{j\sigma_i}(\varphi_j * v)||^{q_i}_{L^{p_i}}\right\}^{\theta_i/q} \\
&= \prod_{i=1}^N ||v||^{\theta^i}_{B^{\sigma_i}_{p_i,q_i}},
\end{aligned}$$

又因为 $B^{\sigma_0}_{p,q} \subset B^{\sigma}_{p,q}$, 故推出式 (2.4.25).

引理 2.4.8　记 $E(\cdot)$ 同式 (2.4.4), 令 $1 < s < 2$. 则有

$$||E(|u|^2)u||_{B^s_{4/3}} \leqslant C||u||_{B^s_4}||u||^2_{B^0_4}, \tag{2.4.26}$$

$$||E(|u|^2)u||_{H^{2,4/3}} \leqslant C||u||_{H^{2,4}}||u||^2_{L^4}. \tag{2.4.27}$$

证明　根据推论 2.4.6, 有

$$||uv||_{B^s_{4/3}} \leqslant C(||u||_{B^{s-1}_4}||v||_{H^1} + ||u||_{L^4}||v||_{H^s} + ||u||_{H^{1,4}}||v||_{H^{s-1}} + ||u||_{B^s_4}||v||_{L^2}), \tag{2.4.28}$$

由凸 Hölder 不等式可推出

$$\|v\|_{H^1} \leqslant C\|v\|_{H^s}^{1/s}\|v\|_{L^2}^{1-1/s}, \tag{2.4.29}$$

$$\|v\|_{H^{s-1}} \leqslant C\|v\|_{H^s}^{1-\frac{1}{s}}\|v\|_{L^2}^{\frac{1}{s}}, \tag{2.4.30}$$

$$\|u\|_{H^{1,4}} \leqslant C\|u\|_{B_4^1} \leqslant C\|u\|_{B_4^s}^{1/s}\|u\|_{B_4^0}^{1-1/s}, \tag{2.4.31}$$

$$\|u\|_{B_4^{s-1}} \leqslant C\|u\|_{B_4^s}^{1-1/s}\|u\|_{B_4^0}^{1/s}. \tag{2.4.32}$$

根据式 (2.4.29)~ 式 (2.4.32) 得到

$$\begin{aligned}\|u\|_{B_4^{s-1}}\|v\|_{H^1} &\leqslant C(\|u\|_{B_4^s}\|v\|_{L^2})^{1-1/s}(\|u\|_{B_4^0}\|v\|_{H^s})^{1/s}\\ &\leqslant C(\|u\|_{B_4^s}\|v\|_{L^2}+\|u\|_{B_4^0}\|v\|_{H^s}).\end{aligned}$$

类似地, 我们有

$$\|u\|_{H^{1,4}}\|v\|_{H^{s-1}} \leqslant C(\|u\|_{B_4^s}\|v\|_{L^2}+\|u\|_{B_4^0}\|v\|_{H^s}).$$

因为 $B_4^0 \subset L^4$, 由式 (2.4.28) 推出

$$\|uv\|_{B_{4/3}^s} \leqslant C(\|u\|_{B_4^s}\|v\|_{L^2}+\|u\|_{B_4^0}\|v\|_{H^s}). \tag{2.4.33}$$

在式 (2.4.33) 中令 $v = E(|u|^2)$, 则

$$\|E(|u|^2)\|_{H^s} \leqslant C(\|E(|u|^2)\|_{H^s}\|u\|_{B_4^0}+\|u\|_{B_4^s}\|E(|u|^2)\|_{H^s}). \tag{2.4.34}$$

显然 $\|E(|u|^2)\|_{H^s} \leqslant \||u|^2\|_{H^s}$. 由引理 2.4.5, 有

$$\||u|^2\|_{H^s} \leqslant C(\|u\|_{H^{1,4}}\|u\|_{B_4^{s-1}}+\|u\|_{L^4}\|u\|_{B_4^s}). \tag{2.4.35}$$

据式 (2.4.31), 式 (2.4.32), 式 (2.4.35), 我们有

$$\||u|^2\|_{H^s} \leqslant C(\|u\|_{B_4^s}\|u\|_{B_4^0}+\|u\|_{L^4}\|u\|_{B_4^s}) \leqslant C\|u\|_{B_4^s}) \leqslant C\|u\|_{B_4^s}\|u\|_{B_4^0}. \tag{2.4.36}$$

同时有

$$\|E(|u|^2)\|_{L^2} \leqslant \||u|^2\|_{L^2} = \|u\|_{L^4}^2. \tag{2.4.37}$$

综合式 (2.4.34), 式 (2.4.36), 式 (2.4.37), 我们推出式 (2.4.26).

式 (2.4.27) 的证明与此类似, 故省略.

推论 2.4.9 令 $n = 2,3, E(\cdot)$ 同式 (2.4.8), 令 $1 < s < 2$, 则有

$$\|E(|u|^2)\|_{B_{4/3}^s} \leqslant C\|u\|_{H^1}^2\|u\|_{B_4^s}, \tag{2.4.38}$$

$$\|E(|u|^2)u\|_{H^{2,4/3}} \leqslant C\|u\|_{H^1}^2\|u\|_{H^{2,4}}. \tag{2.4.39}$$

证明　对于 $n=2,3$, 易见如果当 $\varepsilon>0$ 且足够小 $\left(\varepsilon<\frac{1}{4}\right)$ 则有 $H^1\subset H^{\varepsilon,4}$. 且有 $H^{\varepsilon,4}\subset B_{4,4}^{\varepsilon}$, 而 $B_{4,4}^{\varepsilon}\subset B_{4,2}^0=B_4^0$. 于是推出 $H^1\subset B_4^0$. 因此, 推论 2.4.9 是引理 2.4.8 的直接推论.

引理 2.4.10　令 $\rho=2n/(n-2+2\varepsilon), n\geqslant 2, \varepsilon\in(0,1)$.

(i) 如果 $n\geqslant 3$, 令 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1(n)$, $\varepsilon=1-\dfrac{\alpha(n-2)}{4}$, 当 n=2 时, 令 $\varepsilon\in(0,1)$. 则

$$\||u|^\alpha u\|_{H^{1,\rho'}} \leqslant C\|u\|_{H^1}^\alpha\|u\|_{H^{1,\rho}}. \tag{2.4.40}$$

(ii) 如果 $n\geqslant 3$, 令 $1<s\leqslant 2, 1\leqslant\alpha<\alpha_s(n), \varepsilon=1-\dfrac{\alpha(n-2s)}{4}$; 当 n=2 时, 令 $\varepsilon\in(0,1)$. 则有

$$\||u|^\alpha u\|_{B_{\rho}'^s} \leqslant C\|u\|_{H^1}^\alpha\|u\|_{B_\rho^s}+C\|u\|_{H^1}^{\alpha-1}\|u\|_{H^{1,\rho}}\|u\|_{H^s}. \tag{2.4.41}$$

(iii) 如果 $s\leqslant\dfrac{n}{2}$, 令 $1<s\leqslant 2, 1\leqslant\alpha<\alpha_s(n), \varepsilon=1-\dfrac{\alpha(n-2s)}{4}$; 当 $s>\dfrac{n}{2}$ 时, 令 $\varepsilon=1$. 可得

$$\||u|^\alpha u\|_{B_{\rho}'^s} \leqslant C\|u\|_{H^s}^\alpha\|u\|_{B_\rho^s}. \tag{2.4.42}$$

证明　(i) 的证明是 Kato(1987) 的经典结果. 现在证明 (ii).

为方便起见, 令 $f(u)=|u|^\alpha u$. 则有

$$\|f(u)\|_{\dot B_{\rho'}^s}=\left(\int_0^\infty t^{-2(s-1)}\sum_{|\alpha|=1}\sup_{|h|\leqslant t}\|\Delta_h D^\alpha f(u)\|_{L^{\rho'}}^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac12}. \tag{2.4.43}$$

易见

$$\begin{aligned}&\sum_{|\beta|=1}\|\Delta_h D^\beta f(u)\|_{L^{\rho'}}\\ \leqslant& C\sum_{|\beta|=1}\left(\left\||u_h|^\alpha\Delta_h D^\beta u\right\|_{L^{\rho'}}+\left\|(|u_h|^{\alpha-1}+|u|^{\alpha-1})(\Delta_h u)D^\beta u\right\|_{L^\lambda}\right)\\ =&\sum_{|\beta|=1}(\mathrm{I}+\mathrm{II}).\end{aligned} \tag{2.4.44}$$

将证明可分以下两种情况:

情况 I　$n\geqslant 3$. 首先对 I 进行估计. 令

$$a_0=\alpha\left(\frac12-\frac1n\right),\qquad a_1=\frac1\rho.$$

很容易验证 $a_0+a_1=1/\rho'$. 由 Hölder 不等式, 可得

$$\mathrm{I}\leqslant C\|u\|_{H^1}^{\alpha}\|\Delta_h D^\beta u\|_{L^\rho}. \tag{2.4.45}$$

接下来对 II 进行估计. 令

$$b_0=(\alpha-1)\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\Big),\qquad b_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\qquad b_2=\frac{1}{\rho}.$$

类似地, 有 $\sum\limits_{i=0}^{2}b_i=1/\rho'(b_i>0,i=0,1,2)$. 这就推出

$$\mathrm{II}\leqslant C\|u\|_{H^1}^{\alpha-1}\|u\|_{H^{1,\rho}}\|\Delta_h u\|_{L^{2n/(n-2)}}. \tag{2.4.46}$$

结合式 (2.4.43)~ 式 (2.4.46), 我们有

$$\|f(u)\|_{B^s_{\rho'}}\leqslant C\|u\|_{H^1}^{\alpha}\|u\|_{B^s_\rho}\leqslant C\|u\|_{H^1}^{\alpha-1}\|u\|_{H^{1,\rho}}\|u\|_{B^{s-1}_{2n/(n-2)}}. \tag{2.4.47}$$

因为 $H^s=B^s_2\subset B^{s-1}_{2n/(n-2)}$, 由上式推出式 (2.4.41).

情况 II n=2. 对于任何 $\varepsilon\in(0,1)\alpha\in(0,\infty)$, 可选取 $s_0\in(0,1)$ 使得 $\alpha=2(1-\varepsilon)/(1-s_0)$. 很容易看出

$$\alpha\Big(\frac{1}{2}-\frac{s_0}{n}\Big)+\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho'}.$$

如同情况 I, 可对 I 和 II 估计如下:

$$\mathrm{I}\leqslant C\|u\|_{H^{s_0}}^{\alpha}\|\Delta_h D^\beta u\|_{L^\rho}, \tag{2.4.48}$$

$$\mathrm{II}\leqslant C\|u\|_{H^{s_0}}^{\alpha-1}\|u\|_{H^{1,\rho}}\|\Delta_h u\|_{L^{2n/(n-2s_0)}}. \tag{2.4.49}$$

于是得到

$$\|f(u)\|_{B^s_{\rho'}}\leqslant C\|u\|_{H^{s_0}}^{\alpha}\|u\|_{H^s_\rho}\leqslant C\|u\|_{H^{s_0}}^{\alpha-1}\|u\|_{H^{1,\rho}}\|u\|_{B^{s-1}_{2n/(n-2s_0)}}. \tag{2.4.50}$$

因为 $H^1\subset H^{s_0}$ 和 $H^s=B^s_2\subset B^{s-1+s_0}_2\subset B^{s-1}_{2n/(n-2s_0)}$, 式 (2.4.50) 即意味着式 (2.4.41) 成立.

为证 (iii), 必须先考虑 $s<\frac{n}{2}$. 从式 (2.4.44) 继续. 通过令

$$a_0=\alpha\Big(\frac{1}{2}-\frac{s}{n}\Big),\qquad a_1=\frac{1}{\rho}$$

估计 I, 显然 $a_0+a_1=1/\rho'$. 有

$$\mathrm{I}\leqslant C\|u\|_{H^s}^{\alpha}\|\Delta_h D^\beta u\|_{L^\rho}. \tag{2.4.51}$$

类似地, 通过令

$$a_0=(\alpha-1)\Big(\frac{1}{2}-\frac{s}{n}\Big),\qquad a_1=\frac{1}{\rho}-\frac{s-1}{n},\qquad a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$$

估计 II. 又, 我们有: $a_i>0, i=0,1,2$ 和 $\sum_{i=0}^{2} a_i=1/\rho'$. 从而有

$$\mathrm{II}\leqslant C\|u\|_{H^s}^{\alpha-1}\|u\|_{H^{s,\rho}}\|\Delta_h u\|_{L^{2n/(n-2)}}. \tag{2.4.52}$$

从式 (2.4.43), 式 (2.4.44), 式 (2.4.51) 和式 (2.4.52) 推出

$$\|f(u)\|_{B^s_{\rho'}}\leqslant C\|u\|_{H^s}^{\alpha}\|u\|_{B^s_\rho}\leqslant C\|u\|_{H^s}^{\alpha-1}\|u\|_{B^s_\rho}\|u\|_{B^{s-1}_{2n/(n-2)}}\leqslant C\|u\|_{H^s}^{\alpha}\|u\|_{B^s_\rho}.$$

其次, 当 $s\geqslant\frac{n}{2}$ 时, 容易验证

$$|f(u)\|_{H^s}\leqslant C\|u\|_{H^s}^{\alpha+1}. \tag{2.4.53}$$

对于 $\rho=\dfrac{2n}{n-2+2\varepsilon}, \varepsilon=1$, 上式推出式 (2.4.42).

引理 2.4.11 (i) 设 ρ 同引理 2.4.10(iii), 令 $1\leqslant s\leqslant 2$. 则对于任何 $\alpha\in(0,\alpha_s(n))$, 有

$$\||u|^\alpha u-|v|^\alpha v\|_{L^{\rho'}}\leqslant C(\|u\|_{H^s}^\alpha+\|v\|_{H^s}^\alpha)\|u-v\|_{L^\rho}. \tag{2.4.54}$$

(ii) 估计

$$\|E(|u|^2)u-E(|u|^2)v\|_{L^{4/3}}\leqslant C(\|u\|_{L^4}^2+\|v\|_{L^4}^2)\|u-v\|_{L^4} \tag{2.4.55}$$

成立.

利用凸 Hölder 不等式容易证明, 从略.

定理 2.4.1 的证明如下.

设 ρ 同引理 2.4.10(iii). 为方便起见, 假设 $p_1=2, p_2=\rho$, 及 $p_3=4$. 对于任何 $u, v\in\mathcal{D}$, 令

$$\mathcal{D}=\left\{u\in\bigcap_{i=1}^{3}L^{\gamma(p_i)}(0,T;B^s_{p_i}):\|u\|_{\bigcap_{i=1}^{3}L^{\gamma(p_i)}(0,T;B^s_{p_i})}\leqslant M\right\}. \tag{2.4.56}$$

定义距离 $d(u,v)$ 为

$$d(u,v)=\|u-v\|_{\bigcap_{i=1}^{3}L^{\gamma(p_i)}(0,T,L^{p_i})}.$$

考虑下面一映射:

$$\mathcal{T}: u(t) \to S(t)u_0 - i\int_0^t S(t-\tau)[a|u(\tau)|^\alpha - b_1b_2E(|u(\tau)|^2)]u(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2.4.57}$$

将证明 $\mathcal{T}$ 对某个 $T>0$ 是一个压缩映照. 为方便计, 记 $f_2(u)=a|u|^\alpha$ 和 $f_3(u)=E(|u|^2)u$. 根据式 (2.4.8) 和式 (2.4.9), 对于任意 $u,v\in\mathcal{D}$, 我们有

$$||\mathcal{T}u||_{\bigcap\limits_{i=1}^{3} L^{\gamma(p_i)}(0,T;B^s_{p_i})} \leqslant C||u_0||_{H^s} + C\sum_{i=2}^{3}||f_i(u)||_{L^{\gamma(p_i)'}(0,T;B^s_{p_i'})}, \tag{2.4.58}$$

$$||\mathcal{T}u-\mathcal{T}v||_{\bigcap\limits_{i=1}^{3} L^{\gamma(p_i)}(0,T;L^{p_i})} \leqslant C\sum_{i=2}^{3}||f_i(u)-f_i(v)||_{L^{\gamma(p_i)'}(0,T;L^{p_i'})}. \tag{2.4.59}$$

根据推论 2.4.9 和引理 2.4.10, 得到

$$\begin{aligned} ||\mathcal{T}u||_{\bigcap\limits_{i=1}^{3} L^{\gamma(p_i)}(0,T;B^s_{p_i'})} \leqslant & C||u_0||_{H^s} + CT^{\delta_1}||u||^\alpha_{L^\infty(0,T;H^s)}||u||_{L^{\gamma(p_2)}(0,T;B^s_{p_2})} \\ & + CT^{\delta_2}||u||^2_{L^\infty(0,T;H^1)}||u||_{L^{\gamma(p_3)}(0,T;B^s_{p_3})}, \end{aligned} \tag{2.4.60}$$

其中,

$$\delta_1 = 1-\frac{2}{\gamma(p_2)} = \varepsilon, \qquad \delta_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & n=2, \\ \dfrac{1}{4}, & n=3. \end{cases}$$

ε 同引理 2.4.10 的 (i). 根据引理 2.4.11, 有

$$\begin{aligned} ||\mathcal{T}u-\mathcal{T}v||_{\bigcap\limits_{i=1}^{3} L^{\gamma(p_i)}(0,T;L^{p_i})} \leqslant & CT^{\delta_1}||u||^\alpha_{L^\infty(0,T;H^s)}||u||_{L^{\gamma(p_2)}(0,T;L^{p_2})} \\ & + CT^{\delta_2}||u||^2_{L^\infty(0,T;H^1)}||u||_{L^{\gamma(p_3)}(0,T;L^{p_3})}. \end{aligned} \tag{2.4.61}$$

其中, $\delta_i(i=1,2)$ 同上. 因此

$$||\mathcal{T}u||_{\bigcap\limits_{i=1}^{3} L^{\gamma(p_i)}(0,T;B^s_{p_i})} \leqslant C||u_0||_{H^s} + CT^{\delta_1}M^{\alpha+1} + CT^{\delta_2}M^2M, \tag{2.4.62}$$

$$||\mathcal{T}u-\mathcal{T}v||_{\bigcap\limits_{i=1}^{3} L^{\gamma(p_i)}(0,T;L^{p_i})} \leqslant C(T^{\delta_1}M^\alpha + T^{\delta_2}M^2)||u-v||_{\bigcap\limits_{i=1}^{3} L^{\gamma(p_i)}(0,T;L^{p_i})}. \tag{2.4.63}$$

取 $M=2C||u_0||_{H^s}$. 选择一个足够小的 $T>0$, 使得 $C(T^{\delta_1}M^\alpha + T^{\delta_2}M^2) \leqslant \dfrac{1}{2}$. 根据式 (2.4.62) 和式 (2.4.63), $\mathcal{T}$ 是在 $(\mathcal{D},d)$ 的一个压缩映照. 因此, $\mathcal{T}$ 有唯一不动点

$u \in \mathcal{D}$ 为积分方程

$$u(t) = S(t)u_0 - i\int_0^t S(t-\tau)[a|u(\tau)|^\alpha - b_1b_2E(|u(\tau)|^2)]u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.4.64}$$

的解.

在 $[T,T_1],[T_1,T_2]\cdots$ 重复上面的推理, 容易得出存在一个 $T^* > 0$ 使得 $u \in \bigcup_{i=1}^{3} L^{\gamma(p_i)}(0,T;B^s_{p_i})$ 为式 (2.4.64) 的唯一解.

此外, 如果 $T^* < \infty$, 则由规范的讨论, 有

$$\lim_{t\to T^*}\sup ||u(t)||_{H^s} = \infty. \tag{2.4.65}$$

由式 (2.4.8), 式 (2.4.9), 可推出对于任意一个 $r \in [2, 2n/(n-2))$ 有 $u \in C_{\mathrm{loc}}(0,T^*;H^s)\cap L^{\gamma(r)}_{\mathrm{loc}}(0,T^*;B^s_r)$. 定理 2.4.1 证毕.

定理 2.4.2 和定理 2.4.3 的证明如下.

命题 2.4.12 (守恒律) 令 u 为式 (2.4.5) 和式 (2.4.6) 的一个适当光滑的解, 则

$$||u(t)||_{L^2} = ||u_0||_{L^2}, \qquad E(u(t)) = E(u(0)), \tag{2.4.66}$$

这里

$$E(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2} + \frac{a}{\alpha+2}\|u_0\|^{\alpha+2}_{L^{\alpha+2}} - \frac{b_1b_2}{4}\left\|\left(\frac{\xi_1}{|\xi|}\right)\mathcal{F}|u|^2\right\|^2_{L^2}. \tag{2.4.67}$$

证明 不失一般性, 假设 $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. 用 $\bar{u}$ 乘式 (2.4.5), 取虚部, 得到

$$\int \mathrm{Re}u_t\bar{u}\mathrm{d}x + \mathrm{Im}\int |\nabla u|^2\mathrm{d}x = -b_1b_2\mathrm{Im}\int\left(\left(\frac{\xi_1}{|\xi|}\right)|\mathcal{F}|u|^2|\right)^2\mathrm{d}\xi. \tag{2.4.68}$$

由式 (2.4.68) 推得 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u(t)||^2_{L^2} = 0$. 故有 $||u(t)||_{L^2} = ||u_0||_{L^2}$. 接下来, 用 $\bar{u}_t$ 乘式 (2.4.7), 取实部. 可得

$$\mathrm{Re}\int u\bar{u}_t\mathrm{d}x = a\mathrm{Re}\int |u|^\alpha u\bar{u}_t\mathrm{d}x - \frac{b_1b_2}{2}\mathrm{Re}\int E(|u|^2)\partial t|u|^2\mathrm{d}x,$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x = \frac{a}{\alpha+2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|u|^{\alpha+2}\mathrm{d}x - \frac{b_1b_2}{4}\int\frac{\xi_1^2}{|\xi|^2}\partial t|\mathcal{F}|u|^2|^2\mathrm{d}x.$$

于是 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(u) = 0$, 即 $E(u) = E(u_0)$.

引理 2.4.13 令 $u_0 \in H^s$ 和 $u \in H^s(s \geqslant 1)$ 为式 (2.4.4) 和式 (2.4.5) 的一个解. 假设下列条件之一成立:

(i) $a > 0$, 且$2 < a < \infty$;

(ii) $a > 0, \alpha = 2$, 且$a > b_1b_2$;

(iii) $n = 2, \alpha = 2, b_1b_2 \geqslant 0$, 且$(b_1b_2 - a)||u||_{L^2}^2 < 4$;

(iv) $n = 2, \alpha = 2, b_1b_2 < 0$, 且$-a||u_0||_{L^2}^2 < 4$;

(v) $n = 2, 0 < \alpha < 2$, 且$b_1b_2 \int |u_0(x)|^2 \mathrm{d}x < 4$,

则有 $||u(t)||_{H^1} \leqslant C$, 此处 C 与 t 无关.

证明 为证 (i), 令 $\theta = \dfrac{2+\alpha}{2\alpha}$. 易见 $\dfrac{1}{4} = \dfrac{1-\theta}{2} + \dfrac{\theta}{2+\alpha}$. 有

$$\left\|\left(\frac{\xi_1}{|\xi|}\right)\mathcal{F}|u|^2\right\|_{L^2}^2 \leqslant ||u||_{L^4}^4 \leqslant C||u||_{L^2}^{4(1-\theta)}||u||_{L^{2+\alpha}}^{4\theta}$$
$$= C||u_0||_{L^2}^{2(\alpha-2)/\alpha}||u||_{L^{2+\alpha}}^{2(\alpha+2)/\alpha}. \tag{2.4.69}$$

由式 (2.4.66) 和式 (2.4.69) 推出:

$$E(u_0) = \frac{1}{2}||\nabla u||_{L^2}^2 + \frac{a}{\alpha+2}||u||_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} - \frac{b_1b_2}{4}\left\|\left(\frac{\xi_1}{|\xi|}\right)\mathcal{F}|u|^2\right\|_{L^2}^2$$
$$\geqslant \frac{a}{\alpha+2}||u||_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} - \frac{b_1b_2}{4}||u_0||^{2(\alpha-2)/\alpha}||u||_{L^{2+\alpha}}^{2(\alpha+2)/\alpha}. \tag{2.4.70}$$

首先, 可看出 $||u(t)||_{L^{2+\alpha}} \leqslant C$, 此处 C 与 t 无关. 事实上, 假设不然, 那么存在 t_n 使得 $||u(t_n)||_{L^{2+\alpha}} \uparrow \infty$. 我们可以看到存在一自然数 n_0, 使得对于任意 $n > n_0$ 有

$$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a}{\alpha+2}||u(t_n)||_{L^{2+\alpha}}^{(\alpha^2-2)/\alpha} - C\frac{|b_1b_2|}{2}||u_0||_{L^2}^{2(\alpha+2)/\alpha} \geqslant 1. \tag{2.4.71}$$

由式 (2.4.70) 和式 (2.4.71) 推出, 对于所有的 $n > n_0$ 有

$$||u(t_n)||_{L^{2+\alpha}}^{2(2+\alpha)/\alpha} \leqslant A_n||u(t_n)||_{L^{2+\alpha}}^{2(2+\alpha)/\alpha} \leqslant E(u_0). \tag{2.4.72}$$

上式与 $||u(t_n)||_{L^{2+\alpha}} \uparrow \infty$ 的事实矛盾.

下面, 我们证明 $||u(t_n)||_{H^1} \leqslant C$, 鉴于式 (2.4.66), 我们有

$$||\nabla u||_{L^2}^2 \leqslant 2E(u_0) + \frac{b_1b_2}{2}||\left(\frac{\xi_1}{|\xi|}\right)\mathcal{F}|u|^2||_{L^2}^2$$
$$\leqslant 2E(u_0) + \frac{|b_1b_2|}{2}||u_0||_{L^4}^4$$
$$\leqslant 2E(u_0) + C\frac{b_1b_2}{2}||u_0||_{L^2}^{2(\alpha-2)/\alpha}||u||_{L^{2+\alpha}}^{2(\alpha+2)/\alpha} \leqslant C.$$

(ii) 的证明是平凡的.

下面证明 (iii). 根据 Gagliardo 和 Nirenberg 不等式, 有

$$||u||_{L^4}^4 \leqslant \frac{1}{2}||u||_{L^2}^2||\nabla u||_{L^2}^2 = \frac{1}{2}||u_0||_{L^2}^2||\nabla u||_{L^2}^2.$$

由式 (2.4.66), 有

$$\begin{aligned}E(u_0) &\geqslant \frac{1}{2}||\nabla u||_{L^2}^2 + \frac{a-b_1b_2}{4}||u_0||_{L^4}^4 \\ &\geqslant \frac{1}{2}||\nabla u||_{L^2}^2 + \frac{a-b_1b_2}{8}||u_0||_{L^2}^2||\nabla u||_{L^2}^2.\end{aligned}$$

这就推出结果.

(iv) 和 (v) 的证明与 (iii) 类似, 从略.

定理 2.4.2 和定理 2.4.3 的证明如下.

根据定理 2.4.1, 通过证明 $||u(t)||_{H^s}$ 在 $(0,\infty)$ 中有界, 来证明 $T^*=\infty$. 令 ρ 同引理 2.4.10 中的 (ii). 由命题 2.4.4, 推论 2.4.9, 及引理 2.4.10(i) 推得, 对于任意一个 $r\in[2,2+\alpha_1(n))$, 有

$$\begin{aligned}||u||_{L^{\gamma(r)}(0,T;H^{1,r})} \leqslant & C||u_0||_{H^1} + C|||u|^\alpha u|_{L^{\gamma(\rho)'}(0,T;H^{1,\rho'})} \\ & + C||E(|u|^2)u||_{L^{\gamma(4)'}(0,T;H^{1,4/3})} \\ \leqslant & C||u_0||_{H^1} + CT^\varepsilon||u||_{L^\infty(0,T;H^1)}^\alpha||u||_{L^{\gamma(\rho)}(0,T;H^{1,\rho})} \\ & + C||u_0||_{H^1} + CT^{1-n/4}||u||_{L^\infty(0,T;H^1)}^2||u||_{L^{\gamma(4)}(0,T;H^{1,4})}.\end{aligned}$$

因为 $||u(t)||_{H^1}\leqslant C_0$, 这里 C_0 与 t 无关, 可以选取一个充分小的 $T>0$ 使得

$$C(T^\varepsilon C_0^\alpha + T^{1-n/4}C_0^2) \leqslant \frac{1}{2}.$$

则推出

$$||u||_{L^{\gamma(\rho)}(0,T;H^{1,\rho})\cap(0,T;H^{1,4})} \leqslant 2CC_0||u_0||_{H^1} \leqslant 2CC_0 = C_1.$$

在 $[T,2T],[2T,3T],\cdots,$ 上, 重复以上讨论, 有

$$||u||_{L^{\gamma(\rho)}(nT,(n+1)T;H^{1,\rho})\cap L^{\gamma(4)}(nT,(n+1)T;H^{1,4})} \leqslant 2CC_0.$$

推出 $u\in L_{\rm loc}^{\gamma(\rho)}(0,\infty;H^{1,\rho})\cap L_{\rm loc}^{\gamma(4)}(0,\infty;H^{1,4})$. 此外, 易见对于任何一个 $r\in[2,2+\alpha_1(n))$ 有 $u\in L_{\rm loc}^{\gamma(r)}(0,\infty;H^{1,r})$. 根据命题 2.4.4, 引理 2.4.9, 及引理 2.4.6 中的 (ii), 对于任何一个 $1<s<2$ 及 $r\in[2,2+\alpha_1(n))$, 我们有

$$\begin{aligned}||u||_{L^{\gamma(r)}(0,T;B_r^s)} \leqslant & C||u_0||_{H^s} + C|||u|^\alpha u||_{L^{\gamma(\rho)'}(0,T;B^s_{\rho'})} \\ & + C||E(|u|^2)u||_{L^{\gamma(4)'}(0,T;B^s_{4/3})} \\ \leqslant & C||u_0||_{H^s} + CT^\varepsilon||u||^\alpha_{L^\infty(0,T;H^1)}||u||_{L^{\gamma(\rho)}(0,T;B^s_\rho)} \\ & + CT^\varepsilon||u||^{\alpha-1}_{L^\infty(0,T;H^1)}||u||_{L^{\gamma(\rho)}(0,T;H^{1,\rho})}||u||_{L^\infty(0,T;H^s)} \\ & + CT^{1-n/4}||u||^2_{L^\infty(0,T;H^1)}||u||_{L^{\gamma(4)}(0,T;B^s_4)} \\ \leqslant & C||u_0||_{H^s} + CT^\varepsilon C_0^\alpha||u||_{L^{\gamma(\rho)}(0,T;B^s_\rho)} \\ & + CT^\varepsilon C_0^{\alpha-1}||u||_{L^\infty(0,T;H^s)} \\ & + CT^{1-n/4}C_0^2||u||_{L^{\gamma(4)}(0,T;B^s_4)}.\end{aligned}$$

类似上面的过程, 我们可以选取一个足够小的 $T>0$ 使得

$$C(T^{1-n/4}C_0^2 + T^\varepsilon C_0^{\alpha-1}C_1 + T^\varepsilon C_0^\alpha) \leqslant \frac{1}{2}.$$

则推出

$$||u||_{L^\infty(0,T;H^s)\cap L^{\gamma(\rho)}(0,T;B^s_\rho)\cap L^{\gamma(4)}(0,T;B^s_4)} \leqslant 2C||u_0||_{H^s}.$$

重复以上步骤, 可得定理 2.4.1 中的 $T^*=\infty$, 即

$$u \in L^\infty_{\rm loc}(0,\infty;H^s)\cap L^{\gamma(\rho)}_{\rm loc}(0,\infty;B^s_\rho)\cap L^{\gamma(4)}_{\rm loc}(0,\infty;B^s_4).$$

由命题 2.4.4, 对于任意 $r\in[2,2+\alpha_1(n))$, 有 $u\in L^{\gamma(r)}_{\rm loc}(0,\infty;B^s_r)$.

对于 $s=2$, 以与 $1<s<2$ 的情形证明相同的方法, 可证明对于任意一个 $r\in[2,2n/(n-2))$ 有 $u\in L^{\gamma(r)}_{\rm loc}(0,\infty;H^{2,r})$. 证明细节省略.

2.5 (+, −) 型 Cauchy 问题小初值弱解

考虑以下椭圆 - 双曲类型的 DS 方程的初值问题

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \delta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\,|u|^2\,u + bu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \tag{2.5.1}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + m\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = |u|^2, \tag{2.5.2}$$

$$u(x,y,0)=u_0(x,y), \tag{2.5.3}$$

其中, $\delta>0, m<0$. 这一节将研究 $\delta=+1, m<0$ 时的 DS 系统 (设 $c\equiv -m$):

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta u=a|u|^2u+bu\frac{\partial \varphi}{\partial x},\\
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-c\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}(|u|^2),\\
&u(x,y,0)=u_0(x,y).
\end{aligned}\tag{2.5.4}
$$

为了证明问题 (2.5.1)~(2.5.3) 的解的适定性, 必须强加一个在 $\varphi\to+\infty$ 时的辐射条件. 通过使用特征变量 $\xi=\sqrt{c}x-y,\eta=\sqrt{c}x+y$ 表示为

$$
\lim_{\xi\longrightarrow+\infty}\varphi(x,y)=\lim_{\eta\longrightarrow+\infty}\varphi(x,y)=0. \tag{2.5.5}
$$

应注意到没有 $\xi,\eta\longrightarrow-\infty$ 的条件.

定理 2.5.1　对任意 $u_0\in H^1(\mathbf{R}^2)$ 满足小初值条件

$$
\left[\frac{2|b|}{\sqrt{c}}+\max(-a,0)\right]\int_{R^2}|u_0|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<1, \tag{2.5.6}
$$

则存在 u 和 φ 满足

$$
u\in L^\infty(\mathbf{R}_+;H^1(\mathbf{R}^2))\cap C(\mathbf{R}_+;H^1_w(\mathbf{R}^2)), \tag{2.5.7}
$$

$$
\varphi\in L^\infty(\mathbf{R}_+;C_b(\mathbf{R}^2)),\qquad \nabla\varphi\in L^\infty(\mathbf{R}_+,L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)),\quad 1\leqslant q<2.
$$

在分布意义下满足 $u(0)=u_0$ 和 (2.5.4).

注 1　(i) 式 (2.5.7) 中连续性结果意味着映射 $t\longrightarrow u(t)$ 在 $H^1(\mathbf{R}^2)$ 弱拓扑是连续的.

(ii) 此结果中得到的解满足质量守恒律和下面能量不等式:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\left\{|\nabla u|^2+\frac{1}{2}(a|u|^4+b(\varphi_x^2-c\varphi_y^2))\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 0. \tag{2.5.8}
$$

(iii) 为了便于解释, 来考虑一个关于 φ 的齐次方程. 此外, 对于平均流势能, 一般边界条件是在某特征方向上规定 φ. 确切地说, 设有两个函数 $\varphi_1(t,s),\varphi_2(t,s)$, $s\in\mathbf{R},t\in\mathbf{R}_+$, 它们的边界条件是

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\xi\to+\infty}\varphi(t,x,y)=\varphi_1(t,\eta),\\
&\lim_{\eta\to+\infty}\varphi(t,x,y)=\varphi_2(t,\xi),
\end{aligned}\tag{2.5.5$'$}
$$

其中, $\xi=\sqrt{c}x-y,\eta=\sqrt{c}x+y$, 假设

$$
\varphi_i\in L^\infty(\mathbf{R}_+;C_b(\mathbf{R})),\qquad \lim_{s\to+\infty}\varphi_i(t,s)=0,\qquad i=1,2
$$

则定理 2.5.1 在条件 (2.5.4)~(2.5.5′) 下也是成立的.

首先考虑双曲型方程 φ 的解:

给定函数 $f \in L^1(\mathbf{R}^2)$, 解如下方程:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - c\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f \subseteq \mathbf{R}^2, \tag{2.5.9}$$

其中, φ 满足式 (2.5.5). 有下面的结论.

命题 2.5.2 定义核 $K(=K_c)$

$$K(x, y; x_1, y_1) = \frac{1}{2}H(\sqrt{c}(x_1 - x) + y - y_1)H(\sqrt{c}(x_1 - x) + y_1 - y), \tag{2.5.10}$$

其中 H 是通常的 Heaviside 函数, 对于 $\forall f \in L^1(\mathbf{R}^2)$, 函数 $\varphi = K(f)$

$$K(f) = \varphi(x, y) \equiv \int K(x, y; x_1, y_1) f(x_1, y_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \tag{2.5.11}$$

在 $\mathbf{R}^2$ 上是连续的, 且在分布意义下满足式 (2.5.9) 和式 (2.5.5). 此外 $\varphi \in L^\infty(\mathbf{R}^2)$, $(\partial\varphi/\partial x)^2 - c^2(\partial\varphi/\partial y)^2 \in L^1(\mathbf{R}^2)$, 有下面的估计:

$$\sup_{(x,y)\in\mathbf{R}^2} |\varphi(x, y)| \leqslant \frac{1}{2c}\int_{\mathbf{R}^2} |f|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2.5.12}$$

$$\int_{\mathbf{R}^2} \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{2c}\left(\int |f|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2. \tag{2.5.13}$$

证明 利用特征变量 $\xi = \sqrt{c}x - y, \eta = \sqrt{c}x + y$, 对这些新的变量用一个有上标的函数标识, 则式 (2.5.11) 变为

$$\tilde{\varphi}(\xi, \eta) = \frac{1}{4c}\int_{\xi}^{+\infty}\int_{\eta}^{+\infty} \tilde{f}(\tilde{\xi_1}, \tilde{\eta_1})\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\eta_1. \tag{2.5.14}$$

这表明 φ 在 $\mathbf{R}^2$ 上是连续有界的, 且满足式 (2.5.5)~ 式 (2.5.9) 和估计式 (2.5.12). 式 (2.5.13) 的左边等于 $2\sqrt{c}\int_{\mathbf{R}^2} |\partial\tilde{\varphi}/\partial\xi||\partial\tilde{\varphi}/\partial\eta|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$. 从式 (2.5.14) 可得

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\xi}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\eta} = \frac{1}{16c^2}\left(\int_{\xi}^{+\infty} \tilde{f}(\xi_1, \eta)\mathrm{d}\xi_1\right)\left(\int_{\eta}^{+\infty} \tilde{f}(\xi, \eta_1)\mathrm{d}\eta_1\right),$$

从而式 (2.5.13) 成立.

注 2 一般情况下即使 $f \in D(\mathbf{R}^2)$, 也有 $\nabla\varphi \notin L^2(\mathbf{R}^2)$.

根据命题 2.5.2, 方程 (2.5.4) 可以表示为关于 u 的方程

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = a|u|^2 u + bu\frac{\partial}{\partial x}\Big(K\Big(\frac{\partial}{\partial x}|u|^2\Big)\Big), \\ &u(x, y, 0) = u_0(x, y). \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

方程 (2.5.15) 有一个强奇异的非局部非线性项, 由于核 K 没有任何正则效应, 方程 (2.5.15) 不是一个半线性方程. 通常处理半线性 Schrödinger 方程的一般技巧不能直接应用. 因此通过非线性项的正则化得到整体弱解, 然后在适当的函数空间取极限得到原问题的解.

为此, 设 $\varepsilon > 0$, 寻求一 u^ε 满足

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \mathrm{i}\varepsilon\Delta^2\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \Delta u^\varepsilon = a|u^\varepsilon|^2u^\varepsilon + bu^\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}K\Big(\frac{\partial}{\partial x}|u^\varepsilon|^2\Big),\\ u^\varepsilon(x,y,0) = u_0^\varepsilon(x,y).\end{aligned} \tag{2.5.16}$$

在方程两边乘以 $\bar{u}^\varepsilon$, 在 $\mathbf{R}^2$ 上积分, 取实部可得

$$M_\varepsilon(t) \equiv \int_{\mathbf{R}^2}(|u^\varepsilon(t)|^2 + \varepsilon|\Delta u^\varepsilon(t)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = M_\varepsilon(0), \qquad \forall t. \tag{2.5.17}$$

用同样的方法两边乘以 $\mathrm{i}(\partial\bar{u}^\varepsilon/\partial t)$, 对 $\forall t$ 可以得到

$$E_\varepsilon(t) \equiv \int_{\mathbf{R}^2}\{|\nabla u^\varepsilon(t)|^2 + \frac{a}{2}|u^\varepsilon(t)|^4 + \frac{b}{2}((\varphi_x^\varepsilon(t))^2 - c(\varphi_y^\varepsilon(t))^2)\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = E_\varepsilon(0). \tag{2.5.18}$$

这里记

$$\varphi^\varepsilon = K\left(\frac{\partial}{\partial x}|u^\varepsilon|^2\right). \tag{2.5.19}$$

下面对式 (2.5.16) 的解进行估计, 且其解当 $\varepsilon \to 0$ 时不依赖于 ε. 考虑到式 (2.5.17), 需要满足式 (2.5.6) 的初始条件 $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^2)$ 下的特殊正则性. 例如, 我们将取

$$u_0^\varepsilon = (I - \varepsilon^{1/4}\Delta)^{-1}u_0, \tag{2.5.20}$$

它属于 $H^3(\mathbf{R}^2)$ 且满足

$$\begin{aligned}\|u_0^\varepsilon\|_{L^2} &\leqslant \|u_0\|_{L^2},\\ \|\nabla u_0^\varepsilon\|_{L^2} &\leqslant \nabla\|u_0\|_{L^2},\\ \varepsilon\|\Delta u_0^\varepsilon\|_{L^2}^2 &\leqslant \sqrt{\varepsilon}\|u_0\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

有下面的命题:

命题 2.5.3 (i) 对每一 $u_0^\varepsilon \in H^2(\mathbf{R}^2)$, 方程 (2.5.16) 有唯一解 $u^\varepsilon \in \mathrm{C}(\mathbf{R}_+; H^2(\mathbf{R}^2))$.

(ii) 对 $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^2)$ 满足式 (2.5.6), 存在仅依赖于 $a, b, c, \|u_0\|_{L^2}^2$ 的 ε_0, 且对 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, 由式 (2.5.20) 给出的满足初始条件 u_0^ε 的式 (2.5.16) 的解在 $C(\mathbf{R}_+; H^1(\mathbf{R}^2))$ 上是一致有界的, 即存在一常数 $C_0 = c(a, b, c, \|u_0\|_{H^1})$ 使得

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbf{R}^2)} \leqslant C_0, \quad \forall\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]. \tag{2.5.22}$$

命题 2.5.3(i) 的证明如下.

首先给出式 (2.5.16) 解关于时间局部存在性结果. 引入线性群 $\Sigma_\varepsilon(t)$, 解线性正则化方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial t} + \mathrm{i}\varepsilon\Delta^2\frac{\partial v}{\partial t} + \Delta v = 0, \quad v(0) = v_0.$$

即 $v(t) = \Sigma_\varepsilon(t)v_0$. 然后令:

$$G_\varepsilon(v) = (I + \varepsilon\Delta^2)^{-1}\left\{a|v|^2 v + bv\frac{\partial}{\partial x}\left[K\left(\frac{\partial}{\partial x}|v|^2\right)\right]\right\}. \tag{2.5.23}$$

可写为积分方程

$$u^\varepsilon(t) = \Sigma_\varepsilon(t)u_0^\varepsilon - \mathrm{i}\int_0^t \Sigma_\varepsilon(t-s)G_\varepsilon(u^\varepsilon(s))\mathrm{d}s. \tag{2.5.24}$$

对在 $H^2(\mathbf{R}^2)$ 中给定的 u_0^ε 和 $v \in C([0,T]; H^2(\mathbf{R}^2))$, 引入一映射如下:

$$\mathcal{F}_1 : \mathcal{F}_1 v(t) = \Sigma_\varepsilon(t)u_0^\varepsilon - \mathrm{i}\int_0^t \Sigma_\varepsilon(t-s)G(v(s))\mathrm{d}s. \tag{2.5.25}$$

因此式 (2.5.15) 是对 $\mathcal{F}_1$ 的古典不动点问题. 下面引入一有用的引理.

引理 2.5.4 映射 G_ε 在 $H^2(\mathbf{R}^2)$ 是局部 Lipschitzian 连续的.

证明 设 $v_1, v_2 \in H^2(\mathbf{R}^2)$, 且满足 $\|v_1\|_{H^2(\mathbf{R}^2)} + \|v_2\|_{H^2(\mathbf{R}^2)} \leqslant \mathbf{R}$. 由于 $H^2(\mathbf{R}^2)$ 是一代数, 映射 $v \to |v|^2 v$ 是局部 Lipschitzian 映射并且在 $G_\varepsilon(v_1) - G_\varepsilon(v_1)$ 中相关项的估计是简单的, 即

$$\left\|(I + \varepsilon\Delta^2)^{-1}\left(v_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - v_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)\right\|_{H^2(\mathbf{R}^2)}, \tag{2.5.26}$$

其中 $\varphi_i = K((\partial/\partial x)|v_i|^2)$. 由于 $(I + \varepsilon\Delta^2)^{-1/2}$ 是从 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 到 $H^2(\mathbf{R}^2)$ 的同构, 则存在 $C_\varepsilon > 0$ 满足

$$\text{式(2.5.26)} \leqslant C_\varepsilon\|(I + \varepsilon\Delta^2)^{-1/2}(v_1\varphi_{1x} - v_2\varphi_{2x})\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}. \tag{2.5.27}$$

因为 $v_1\varphi_{1x} - v_2\varphi_{2x} = (v_1\varphi_1 - v_2\varphi_2)_x + v_{2x}\varphi_2 - v_{1x}\varphi_2$, 则式 (2.5.27) 的右边是有界的, 且有

$$\text{式(2.5.26)} \leqslant C'_\varepsilon \leqslant C_\varepsilon(\|v_1\varphi_1 - v_2\varphi_2\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \|v_{2x}\varphi_2 - v_{1x}\varphi_1\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}. \tag{2.5.28}$$

由于 $v_1\varphi_1 - v_2\varphi_2 = (v_1 - v_2)\varphi_1 + v_2(\varphi_1 - \varphi_2)$; 因此

$$\|v_1\varphi_1 - v_2\varphi_2\|_{L^2} \leqslant |\varphi_1|_{L^\infty}|v_1 - v_2|_{L^2} + |v_2|_{L^2}|\varphi_1 - \varphi_2|_{L^\infty}.$$

利用 $\varphi_i = K((\partial/\partial x)|v_i|^2)$ 和命题 2.5.2, 得到

$$\|v_1\varphi_1 - v_2\varphi_2\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \leqslant C\mathbf{R}^2|v_1 - v_2|_{H^2(\mathbf{R}^2)}. \tag{2.5.29}$$

对 $\|v_{2x}\varphi_2 - v_{1x}\varphi_1\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}$ 同样类型的估计成立. 回到式 (2.5.28) 对式 (2.5.26) 可以得到想要的结果.

于是由经典的存在唯一性理论推得方程 (2.5.16)(或式 (2.5.24)) 有唯一的最大解 $u^\varepsilon \in C([0,T^\varepsilon); H^2(\mathbf{R}^2))$ 满足下面的两个条件之一:

$$T^\varepsilon = +\infty \tag{2.5.30}$$

或

$$0 < T^\varepsilon = \infty, \qquad \limsup_{t\to T^\varepsilon} \|u^\varepsilon(t)\|^2_{H^2(\mathbf{R}^2)} = \infty. \tag{2.5.31}$$

由于 $u^\varepsilon \in C([0,T^\varepsilon); H^2(\mathbf{R}^2))$, 可以验证式 (2.5.17) 成立, 利用式 (2.5.17) 可断定式 (2.5.31) 不会出现, 因此可得式 (2.5.16) 满足初始条件的全局解, 只要 $u^\varepsilon \in C(\mathbf{R}^+; H^2(\mathbf{R}^2))$. 这就证明了命题 2.5.3 的第一部分.

命题 2.5.3(ii) 的证明如下.

我们将给出式 (2.5.22) 的一致性估计的证明. 设 $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^2)$ 满足式 (2.5.6). 令 $\omega \equiv 2|b|/\sqrt{c}+\max(-a,0)$, $k \equiv \omega|u_0|^2_{L^2} < 1$. 取 $\varepsilon_0 = (1-k)^2/(4k^2)$, 可由式 (2.5.21) 得由式 (2.5.20) 定义的 u_0^ε 满足

$$\omega(\|u_0^\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \varepsilon\|\Delta u_0^\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)}) \leqslant (1+k)/2 < 1, \qquad \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]. \tag{2.5.32}$$

于是应用式 (2.5.17)

$$\omega\int |u^\varepsilon(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant (1+k)/2 < 1, \qquad \forall t \geqslant 0 \quad \forall \varepsilon \in [0,\varepsilon_0], \tag{2.5.33}$$

由上面的不等式和现在可以验证的式 (2.5.18) 可以推得所需要的界. 事实上, 应用估计式 (2.5.13) 与由式 (2.5.19) 定义的 φ^ε 有

$$\int |(\varphi_x^\varepsilon)^2 - c(\varphi_y^\varepsilon)^2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{2}{c}|u^\varepsilon|^2_{L^2}|\nabla u^\varepsilon|^2_{L^2}. \tag{2.5.34}$$

且由于

$$\int_{\mathbf{R}^2} |v|^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant 2|\nabla v|^2_{L^2}|v|^2_{L^2}, \qquad v \in H^1(\mathbf{R}^2). \tag{2.5.35}$$

由式 (2.5.18) 可得

$$|\nabla u^\varepsilon|^2_{L^2} \leqslant \omega|u|^2_{L^2}|\nabla u^\varepsilon|^2_{L^2} + E_\varepsilon(0).$$

因此由于式 (2.5.33), 可得

$$|\nabla u(t)^{\varepsilon}|_{L^2}^2 \leqslant 2E_{\varepsilon}(0)/(1-k), \qquad \forall t \geqslant 0, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

最后, 利用式 (2.5.21), 式 (2.5.34), 式 (2.5.35), 推得

$$|\nabla u(t)^{\varepsilon}|_{L^2}^2 \leqslant \left[2 + 2\left(\max(-a, 0) + \frac{|b|}{\sqrt{c}}\right)|u_0|_{L^2}^2\right](1-k)^{-1}|\nabla u_0|_{L^2}^2,$$
$$\forall t \geqslant 0, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]. \tag{2.5.36}$$

从式 (2.5.33) 和式 (2.5.36) 得到估计式 (2.5.22).

现在, 我们证明定理 2.5.1.

证明通过在式 (2.5.16) 中取 $\varepsilon \to 0$ 时的极限得到. 取 $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^2)$ 满足定理 2.5.1 中的假设条件 (2.5.6). 然后记 $u^{\varepsilon} \in C(\mathbf{R}_+; H^2(\mathbf{R}^2))$ 为命题 2.5.3 得到的式 (2.5.16) 的解. 假设 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, 则式 (2.5.22) 成立. 式 (2.5.16) 可写为

$$\mathrm{i}(I + \varepsilon\Delta^2)\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t} = -\Delta u^{\varepsilon} + a|u^{\varepsilon}|^2 u^{\varepsilon} + b u^{\varepsilon}\frac{\partial \varphi^{\varepsilon}}{\partial x}.$$

这个方程的右边在 $H^{-1(\mathbf{R}^2)}$ 中是有界的, 且不依赖于 ε, . 因此对 $\mathrm{d}u^{\varepsilon}/\mathrm{d}t$ 上式同样成立, 于是可以推得

$$|u^{\varepsilon}(t)|_{H^1(\mathbf{R}^2)} + \left|\frac{\mathrm{d}u^{\varepsilon}}{\mathrm{d}t}(t)\right|_{H^{-1}(\mathbf{R}^2)} \leqslant C_0', \quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]. \tag{2.5.37}$$

由于有界性, 我们可以从 u^{ε} 中抽取一子族仍定义为 u^{ε}, 它以弱 * 拓扑收敛到 $u \in L^{\infty}(\mathbf{R}_+; H^1(\mathbf{R}^2))$, 且有 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t \in L^{\infty}(\mathbf{R}_+; H^{-1}(\mathbf{R}^2))$, 因此 $u \in C(\mathbf{R}_+; H_w^1(\mathbf{R}^2))$, 且由于 $u^{\varepsilon}(0) \to u_0$, 有 $u(0) = u_0$ 成立.

为了证明函数 u 和 $\varphi = K((\partial/\partial x))|u|^2)$ 确实是方程 (2.5.4) 的解, 剩下来对式 (2.5.16) 中的非线性项取极限. 两项 $|u^{\varepsilon}|^2 u^{\varepsilon}$ 和 $u^{\varepsilon}\varphi_x^{\varepsilon}$ 具有不同的性质. 第一项是局部项, 利用式 (2.5.36) 和经典紧性结论, 在 $L_{\mathrm{loc}}^p(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2)$ 有

$$u^{\varepsilon} \to u, \qquad \forall p \in [2, \infty] \text{ 且在} \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \text{ 上几乎处处成立}. \tag{2.5.38}$$

关于非局部项 $u^{\varepsilon}\varphi_x^{\varepsilon}$ 需要有很强的结果. 有下面的命题:

命题 2.5.5 前面的假设成立, 在 $L^2([0, T] \times \mathbf{R}^2)(\forall T < \infty)$ 中函数族 u^{ε}, 当 $\varepsilon \to 0$ 时 u^{ε} 强收敛到 u.

证明 由式 (2.5.22), 在 $L^{\infty}(\mathbf{R}_+; L^1(\mathbf{R}^2))$ 中, $(\partial/\partial x)|u^{\varepsilon}|^2 = 2\mathrm{Re}(\bar{u}^{\varepsilon}\partial u^{\varepsilon}/\partial x)$ 是有界的, 因此, 应用式 (2.5.12), 可得 φ^{ε} 在 $L^{\infty}(\mathbf{R}_+; L^1(\mathbf{R}^2))$ 中有不依赖于 ε 的界. 从 φ^{ε} 中抽取一子族以弱 * 拓扑收敛到 $\psi \in L^{\infty}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2)$. 由于式 (2.5.22), $\partial\varphi^{\varepsilon}/\partial x$

在 $L^\infty(\mathbf{R}_+, L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2))(\forall q \in [1.2])$ 中是有界的. 在此结论成立的情况下, 从式 (2.5.38) 可得 (上面抽取的子族) $u^\varepsilon \partial\varphi^\varepsilon/\partial x$ 收敛到 $u\partial\psi/\partial x$, 其中 ψ 是 φ^ε 的弱极限. 再利用式 (2.5.38), 在式 (2.5.16) 中取 $\varepsilon \to 0$ 时的极限, 可得

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = a|u|^2 u + bu\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{2.5.39}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x).$$

下面证明在 $L^\infty(\mathbf{R}_+, L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2))$ 中对 $\forall q \in [1.2]$ $\partial\varphi^\varepsilon/\partial x$ 确实是有界的. 利用特征变量和 $\varphi^\varepsilon = K((\partial/\partial x)|u^\varepsilon|^2)$, 我们可以归结为证明 $(\partial/\partial\xi)\int_\eta^\infty |u^\varepsilon(\xi,\eta_1)|^2 \mathrm{d}\eta_1$ 在 $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$ 是有界的. 为此目的我们取 $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ 和

$$I = \int\int \zeta \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\int_\eta^\infty |u^\varepsilon|^2(\xi,\eta_1)\mathrm{d}\eta_1\right)^q \mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi.$$

用 $R \geqslant 0$ 表示 ζ 支集的直径, 设 $C = \|\zeta\|_\infty$; 估计 I 如下:

$$\begin{aligned}
|I| &\leqslant 2CR\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|u^\varepsilon|\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \xi}\right|\mathrm{d}\eta\right) q\mathrm{d}\xi \\
&\leqslant 2CR\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|u^\varepsilon|^2\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{q}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \xi}\right|^2\mathrm{d}\eta\right)^{q/2}\mathrm{d}\xi \\
&\leqslant 2CR\left(\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|u^\varepsilon|^2\mathrm{d}\eta\right)^{q/(q-2)}\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{2-q}{2}}\cdot\left(\int_{-R}^{R}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \xi}\right|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{q}{2}}.
\end{aligned}$$

由于式 (2.5.22) 最后的积分是有界的, 于是可推得

$$|I| \leqslant C'\left(\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|u^\varepsilon|^2\mathrm{d}\eta\right)^{q/(q-2)}\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{2-q}{2}}.$$

由于 $u^\varepsilon \in H^1(\mathbf{R}^2)$, 有经典的迹估计

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}|u^\varepsilon(\xi,\eta)|^2\mathrm{d}\eta &= \int_{-\infty}^{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}|u^\varepsilon|^2\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\eta \\
&\leqslant 2\int\int|u^\varepsilon|\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\xi}\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \leqslant \|u^\varepsilon\|^2_{H^1(\mathbf{R}^2)}.
\end{aligned}$$

这就证明了所需的有界性, 从而结论成立.

由于 ψ 是实值的, 因此从式 (2.5.39) 可知, u 的 L^2 范数是与时间无关的.

$$\int_{\mathbf{R}^2}|u(x,y,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^2}|u_0(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{2.5.40}$$

事实上, 由于 $u \in C(\mathbf{R}_+; H^1(\mathbf{R}^2))$, $\psi \in L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2)$, 从式 (2.5.39) 可得 $\partial u/\partial t \in L^\infty(\mathbf{R}_+; H^{-1}(\mathbf{R}^2))$. 因此 $\int_{\mathbf{R}^2} |u(x,y,t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 分布意义下时间导数等于 $2\mathrm{Re}\langle u, u_t\rangle$, 其中 $\langle\cdot\rangle$ 是定义在 $H^1(\mathbf{R}^2)$ 与 $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$ 之间的对偶积. 由于 ψ 是实值的, 于是由 $\mathrm{Re}\langle u, u_t\rangle = 0$ 可得到式 (2.5.40).

另一方面, 利用式 (2.5.17) 和式 (2.5.21), 对 $\forall T > 0$ 我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \int_{\mathbf{R}^2} (|u^\varepsilon(t)|^2 + \varepsilon|\Delta u^\varepsilon(t)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t = T\int_{\mathbf{R}^2} |u_0|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.5.41}$$

由于在 $L^2([0,T]\times\mathbf{R}^2)$ 中 $(u^\varepsilon, \varepsilon\Delta u^\varepsilon)$ 是弱收敛到 $(u, 0)$, 结合式 (2.5.40) 和式 (2.5.41), 可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \int_{\mathbf{R}^2} (|u^\varepsilon(t)|^2 + \varepsilon|\Delta u^\varepsilon(t)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t = \int\int_{\mathbf{R}^2} |u|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t.$$

因此在 $L^2([0,T]\times\mathbf{R}^2)$ 中 $(u^\varepsilon, \varepsilon\Delta u^\varepsilon)$ 强收敛到 $(u, 0)$. 于是证明了命题 2.5.5.

现在完成定理 2.5.1 的证明. 我们断言实际上 $\psi = K((\partial/\partial x)|u|^2)$, 因此式 (2.5.40) 就是式 (2.5.4), 这就得到定理 2.5.1 的证明. 事实上, 取 $\eta \in \mathrm{D}([0,\infty]\times\mathbf{R}^2$(实值)) 和形式

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_{\mathbf{R}^2} \varphi^\varepsilon(z)\eta(z,t)\mathrm{d}z\mathrm{d}t\\ =&2\int\int\int \eta(z,t)\mathrm{Re}\left(\bar{u}^\varepsilon(z_1,t)\frac{\partial \bar{u}^\varepsilon}{\partial x}(z_1,t)K(z,z_1)\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}z_1\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{2.5.42}$$

其中用到了式 (2.5.11).

首先, 式 (2.5.42) 的左边收敛到 $\int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}\psi(z,t)\eta(z,t)\mathrm{d}z\mathrm{d}t$. 其次, 以 $L^\infty(\mathbf{R}_+; H^1(\mathbf{R}^2))$ 中的弱 * 拓扑 $u^\varepsilon \to u$, 以 $L^2(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^2)\otimes L^2(\mathbf{R}^2))$ 中的弱 * 拓扑

$$\eta(z,t)(\partial\bar{u}^\varepsilon/\partial x)(z,z_1)K(z,z_1) \to \eta(z,t)(\partial\bar{u}/\partial x)(z,z_1)K(z,z_1).$$

最后, 由于命题 2.5.5, 以 $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^2)\otimes L^2(\mathbf{R}^2))$ 中的强拓扑 $u^\varepsilon(z_1,t)$ 收敛到 $u(z_1,t)$. 因此式 (2.5.42) 的右边收敛到 $\int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}\varphi(z,t)\eta(z,t)\mathrm{d}z\mathrm{d}t$. 于是证明了结论.

注 3 在注 1 的 (iii) 中, 提到的式 (2.5.4)~ 式 (2.5.5′) 可以被解决. 事实上, 用下式代替式 (2.5.15) 就足够了.

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = a|u|^2u + bu\frac{\partial}{\partial x}\left(K\left(\frac{\partial}{\partial x}|u|^2\right)\right) + bu(\phi_1+\phi_2),$$

其中

$$\phi_1(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\{\varphi_1(t, cx+y)\},$$

$$\phi_2(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\{\varphi_2(t,cx-y)\}.$$

Tsutsumi(1994) 利用拟共形不等式, 借助于方程的另一种正则化, 得到小初值弱解的整体存在性, 并且给出其衰减估计. 主要结果如下:

以符号 $\widetilde{\varphi}$ 表示以特征变量 $\alpha=\sqrt{c}x-y, \beta=\sqrt{c}x+y$ 为变量的函数, 这里强加一个在 $\varphi\to+\infty$ 时的辐射条件为：当 $\alpha,\beta\to+\infty$,

$$\widetilde{\varphi}(\alpha,\beta,t), \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\alpha}(\alpha,\beta,t), \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\beta}(\alpha,\beta,t), \frac{\partial}{\partial\alpha}\widetilde{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}(\alpha,\beta,t),$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\widetilde{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}(\alpha,\beta,t)\to 0. \tag{2.5.43}$$

将证明式 (2.5.1)~ 式 (2.5.4) 的满足拟共形不等式

$$4t^2\left\{\left\|\nabla(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x^2+y^2)/4t}u)\right\|_{L^2}^2+\frac{a}{2}\int|u|^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int((\varphi_{xx})^2-m(\varphi_{xy})^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}$$
$$\leqslant\left\|(x^2+y^2)^{1/2}u_0\right\|_{L^2}^2 \tag{2.5.44}$$

的整体弱解的存在性. 并且获得弱解的衰减估计. 假如考虑强解和经典解, 式 (2.5.44) 这个不等式就变为等式, 称为拟共形等式,

定义带权 Sobolev 空间 $H^{m,s}=H^{m,s}(\mathbf{R}^2)$：对任何 $m\in\mathbf{R}, s\in\mathbf{R}$,

$$H^{m,s}=\left\{f\in S';\|f\|_{H^{m,s}}\equiv\left\|(1+|x|^2)^{s/2}(1-\Delta)^{m/2}\right\|_{L^2}<\infty\right\}.$$

定理 2.5.6　假设 $u_0\in H^{1,0}\cap H^{0,1}$ 满足

$$[2|b|+\max(-a,0)]\int|u_0(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<1, \tag{2.5.45}$$

则初值问题 (2.5.1)~(2.5.4) 方程至少有一个解 (u,φ),

$$u\in L^\infty([0,\infty);H^{1,0}\cap H^{0,1})\cap C([0,\infty);H_w^{1,0}), \tag{2.5.46}$$

$$\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}\in L^\infty([0,\infty);C_b(\mathbf{R}^2)), \tag{2.5.47}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\in L^\infty([0,\infty);L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)), \qquad \forall q\in(1,2]. \tag{2.5.48}$$

此外, (u,φ) 满足拟共形不等式 (2.5.44), 并且对任何 $p>2$, 有

$$\|u(t)\|_{L^p(\mathbf{R}^2)}\leqslant Ct^{-(1-2/p)}, \tag{2.5.49}$$

其中, C 是正常数.

注 4 N.Hayashi 研究了 (+, −), (−, −) 型 DS 方程, 得到带权空间小初值解的局部存在性, 主要结果是:

定理 $H_1(-,-)$ 型 设 $u_0 \in H^{\delta,0} \cap H^{0,\delta}, \partial_x\phi_1 \in H_x^{\delta,0}, \partial_y\phi_2 \in H_y^{\delta,0}$ 并且 $\|u_0\|_{H^{\delta,0}} + \|u_0\|_{H^{0,\delta}}$ 充分小, 则存在正时间 T 和式 (2.5.1)∼ 式 (2.5.3) 的唯一解, 使得

$$u \in C([0,T]; H^{\delta,0} \cap H^{0,\delta}),$$

$$\int_0^T \|\langle\bar{x}\rangle^{-\gamma}\langle D\rangle^{\delta+1/2}u(t)\|^2 \mathrm{d}t < \infty,$$

其中, $2\gamma = \delta, \delta = 1 + \epsilon, \epsilon > 0$ 充分小.

定理 $H_2(+,-)$ 型 设

$$\langle\bar{x}\rangle\, u_0 \in H^{\delta-1/2,0} \cap H^{0,\delta-1/2},$$

$$\partial_x\phi_1 \in H_x^{\delta-1/2,0}, \qquad \partial_y\phi_2 \in H_y^{\delta-1/2,0}$$

和

$$\|\,\langle\bar{x}\rangle\, u_0\|_{H^{\delta-1/2,0}} + \|\,\langle\bar{x}\rangle\, u_0\|_{H^{0,\delta-1/2}},$$

充分小, 则存在正时间 T 和式 (2.5.1)∼ 式 (2.5.3) 的唯一解, 使得

$$u \in C([0,T]; H^{\delta-1/2,0} \cap H^{0,\delta-1/2}) \bigcap C([0,T]; H_{\mathrm{loc}}^{\delta+1/2,0})$$

和

$$\int_0^T \|\,\langle\bar{x}\rangle^{-\gamma}\,\langle D\rangle^{\delta}\, u(t)\|^2 \mathrm{d}t + \int_0^T t^2\|\,\langle D\rangle^{1+\delta}\, u(t)\|_{L^2_{\mathrm{loc}}}^2 \mathrm{d}t < \infty,$$

其中, δ, γ 同定理 H_1. 这里, $\phi_1(x,t) = \lim\limits_{y\to\infty}\phi(x,y,t), \phi_2(y,t) = \lim\limits_{x\to\infty}\phi(x,y,t)$ 而 $H^{l,s} = \{f \in L^2; \|f\|_{H^{l,s}} = \|\,\langle\bar{x}\rangle^s\,\langle D\rangle^l\, f\|_{L^2} \leqslant \infty\}$ (对于 (−, −) 型: $l+s>1, l>0, s>0$, 对于 (+, −) 型, $l+s>1/2$,). 以及

$$\langle D\rangle = (1-\partial_x^2-\partial_y^2)^{1/2}, \qquad \langle\bar{x}\rangle = (1+x^2+y^2)^{1/2}.$$

由于定理的证明很复杂, 这里不再给出.

2.6 解的爆破与退化 DS 方程

本节我们研究 DS 方程解的爆破与退化 DS 方程, 首先给出精确的爆破解, 然后研究退化 DS 方程, 证明小初值整体弱解的存在性, 同时给出解发生爆破的若干充分条件.

2.6.1　精确的爆破解

考虑如下 DS 系统：

$$\mathrm{i}\partial_t u + \delta\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \lambda |u|^2 u + \mu\partial_x\varphi \cdot u, \tag{2.6.1}$$

$$\partial_x^2\varphi + m\partial_y^2\varphi = \partial_x |u|^2. \tag{2.6.2}$$

本节研究具有爆破或自聚焦性质的解. 在双曲 - 椭圆情形下构造 DS 的精确爆破解, 下面先引入 DS 方程的一些基本性质.DS 方程有以下特殊的不变性：

$(u,\varphi) \to (Cu, C\varphi)$, 其中

$$(Cu)(x,y,t) = (a+bt)^{-1}\exp(\mathrm{i}b(4(a+bt))^{-1}(\delta x^2+y^2))u(X,Y,T), \tag{2.6.3}$$

$$(\tilde{C}\varphi)(x,y,t) = (a+bt)^{-1}\varphi(X,Y,T), \tag{2.6.4}$$

$$X=(a+bt)^{-1}x,\quad Y=(a+bt)^{-1}y,\quad T=(a+bt)^{-1}(c+dt),$$

和

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbf{R}),$$

即 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$ 和 $ad-bd=1$. 相应的守恒量是

$$\delta\left\|(x+2\mathrm{i}\delta t\partial_x)u\right\|_2^2 + \left\|(y+2\mathrm{i}t\partial_y)u\right\|_2^2 + 2t^2(\lambda\left\|u\right\|_4^4 + \mu\left\|\partial_x\varphi\right\|_2^2 + \mu m\left\|\partial_y\varphi\right\|_2^2). \tag{2.6.5}$$

我们通过用 $(C,\tilde{C})$ 变换来寻找精确的爆破解. 首先寻找简单形式的特殊解

$$u(x,y,t) = 1/f(x,y),\quad \varphi(x,y,t) = \gamma\partial_x f(x,y)/f(x,y) = \gamma\partial_x(Inf(x,y)),$$

其中 $f(x,y)=1+\alpha x^2+\beta y^2$. 将 φ 代入式 (2.6.2) 的左边, 我们有

$$\partial_x^2\varphi + m\partial_y^2\varphi = 2\gamma\partial_x((\alpha+\beta m)+\alpha(\beta m-\alpha)x^2+\beta(\alpha-\beta m)y^2/f^2),$$

因此得到 $\alpha=\beta m$ 和 $\gamma=\dfrac{1}{4}\alpha$. 类似的, 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\partial_t u + \delta\partial_x^2 u + \partial_y^2 u - \lambda|u|^2 u - \mu\partial_x\varphi.u\\ =&-((4\alpha\delta+4\beta+2\lambda+\mu)-\alpha(12\alpha\delta-4\beta+\mu)x^2+\beta(4\alpha\delta-12\beta+\mu)y^2)/(2f^3).\end{aligned}$$

这意味着 $m\delta=-1$ 和 $\mu=-2\lambda=16\beta$. 因而,

$$v_\alpha(x,y) = (1+\alpha(x^2-\delta y^2))^{-1}, \tag{2.6.6}$$

$$\psi_\alpha(x,y) = \frac{1}{2}x(1+\alpha(x^2-\delta y^2))^{-1} \tag{2.6.7}$$

都是 DS 方程的解, 只要 $m\delta = -1$, $\mu = -2\lambda = 16\alpha/m$. 当 $\delta = -1$ 和 $\alpha > 0$, 有 $v_\alpha \in L^2$ 和

$$\|v_\alpha\|_2 = (\pi/\alpha)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.6.8}$$

现在令 $u_\alpha = Cv_\alpha, \varphi_\alpha = \tilde{C}\psi_\alpha$ 且 $\alpha > 0, ab \neq 0$.

令 $m = 1, \delta = -1, \mu = -2\lambda = 16\alpha/m.m = 1, \delta = -1, \mu = -2\lambda = 16\alpha/m$. 于是 DS 是双曲 - 椭圆型, 并且 $(u_\alpha, \varphi_\alpha)$ 为 DS 的解. 初始条件变为

$$u_\alpha(x, y, 0) = a^{-1}\exp(-\mathrm{i}b(4a)^{-1}(x^2 - y^2))v_\alpha(x, y), \tag{2.6.9}$$

进一步, 对于任何的 t 且 $a + bt \neq 0$,

$$\|u_\alpha(t)\|_2 = \|v_\alpha\|^2 = (\pi/\alpha)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.6.10}$$

通过直接计算,

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}u_\alpha(t), \qquad \nabla u_\alpha(t) \notin L^2$$

(对于任何 $t \in \mathbf{R}$). 因此在任何情形下解 u_α 是一个 L^2- 解, 而不是 H^1- 解. 另一方面,

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}u_\alpha(t), \qquad (-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_\alpha(t) \in L^2.$$

且对任何 $s, t \in \mathbf{R}, 0 < s < 1$ 同时 $a + bt \neq 0$.

现在来描述爆破解 $u_\alpha(t)$ 的形成. 为了简单起见, 假设 $ab < 0$, 令 $T = -a/b$. 质量密度取形式

$$\left|u_\alpha(x, y, t)^2\right| = \varepsilon^{-2}(1 + \alpha\varepsilon^{-2}(x^2 + y^2))^{-2} = \varepsilon^{-2}\left|v_\alpha(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}y)^2\right|,$$

且 $\varepsilon = a + bt = -b(T - t)$. 从式 (2.6.8), 有

$$\text{当}t \to T, \qquad |u_\alpha(t)|^2 \to (\pi/\alpha)\delta, \tag{2.6.11}$$

其中, δ 表示初始 Dirac 测度. 进一步, 对任何 s 且 $0 < s < 1$, 令 $t \to T$, 有

$$\left\|(x^2 + y^2)^{\frac{s}{2}}u_\alpha(t)\right\|_2 = |b|^s|T - t|^s\left\|(x^2 + y^2)^{\frac{s}{2}}v_\alpha\right\|_2 \to 0, \tag{2.6.12}$$

$$\begin{aligned}\left\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_\alpha(t)\right\|_2 &\geqslant C\left\|(x^2 + y^2)^{\frac{s}{2}} -^{\frac{s}{2}} u_\alpha(t)\right\|_2\\ &= C|b|^{-s}|T - s|^{-s}\left\|(x^2 + y^2)^{\frac{s}{2}}v_\alpha\right\|_2 \to \infty.\end{aligned} \tag{2.6.13}$$

2.6.2　退化 DS 方程解的存在性及爆破

本节研究退化 Davey-Stewartson 方程:

$$\mathrm{i}\psi_t + \psi_{xx} = \chi\psi, \tag{2.6.14}$$

$$\chi_y = |\psi|_x^2. \tag{2.6.15}$$

其中初始条件

$$\psi(0,x,y) = \psi_0(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2. \tag{2.6.16}$$

始终假设

$$\lim_{|x|\to\infty} \psi(t,x,y) = 0, \qquad \lim_{y\to-\infty} \chi(t,x,y) = 0. \tag{2.6.17}$$

我们首先研究整体弱解的存在性.

引入一个 χ 的变换 φ, 将系统方程 (2.6.14) 和 (2.6.15) 变为 φ 的非局部非线性退化的 Schrödinger 方程. 然后类似于 2.5 节中的方法, 构造一个 ψ^ϵ 和 φ^ϵ 的正则方程, 证明其解的全局存在性. 在适当的限制下证明 φ^ϵ 在 $L^\infty(\mathbf{R}^+ : L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2))$ 及 ψ^ϵ 在 $L^2(0,T : L^2(\mathbf{R}^2))$ 上的强收敛性以确保非局部非线性项的收敛性, 进而证明最初系统 (2.6.14) 和 (2.6.15) 弱解的存在性.

定义 2.6.1　函数对 ψ,χ 称为式 (2.6.14)~ 式 (2.6.17) 的弱解, 如果满足

$$\begin{aligned}&\psi,\psi_x \in L^\infty(\mathbf{R}^+;L^2(\mathbf{R}^2)),\\ &\chi \in L^\infty(\mathbf{R}^+;L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)), \qquad \chi_x \in L^\infty(\mathbf{R}^+;L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)),\end{aligned}$$

且满足在 $L^\infty(\mathbf{R}^+;H^{-1})(\mathbf{R}^2)$ 下的式 (2.6.14), 在 $L^\infty(\mathbf{R}^+;H^1)(\mathbf{R}^2)$ 下的式 (2.6.15).

易知式 (2.6.14)、式 (2.6.15) 满足守恒律.

$$\int_{\mathbf{R}^2} |\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^2} |\psi_0|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2.6.18}$$

$$E(t) = \int_{\mathbf{R}^2} \left(|\psi_x|^2 + \frac{1}{2}\chi|\psi|^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = E(0). \tag{2.6.19}$$

注意到式 (2.6.18) 的守恒是严格的 (见引理 2.6.8 及其推导), 而式 (2.6.19) 是形式的, 且在无穷远处附加条件

$$\lim_{|x|,|y|\to\infty} \chi = 0 \tag{2.6.21$'$}$$

时至少对充分正则解是满足的. 用 $\overline{\psi}_t$ 乘式 (2.6.14) 的两端, 在 $\mathbf{R}^2$ 上积分, 取实部, 注意到

$$\int_{\mathbf{R}^2} \chi\psi\overline{\psi}_t \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2} \chi|\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2} \chi_t|\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^2}\chi_t|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\int_{\mathbf{R}^2}\chi_{yt}\left(\int_{-\infty}^{y}|\psi|^2\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= -\int_{\mathbf{R}^2}\left(|\psi|_x^2\right)_t\left(\int_{-\infty}^{y}|\psi|^2\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= -\int_{\mathbf{R}^2}\left(|\psi|^2\right)_t\left(\int_{-\infty}^{y}|\psi|^2\mathrm{d}\eta\right)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbf{R}^2}\chi\left(|\psi|^2\right)_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

$$\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}^2}\psi_{xx}\overline{\psi}_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}^2}(|\psi_x|^2)_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

可得式 (2.6.19).

定理 2.6.2 若 $\psi_0\in L^2(\mathbf{R}^2)$, $\psi_{0x}\in L^2(\mathbf{R}^2)$ 满足

$$\int_{\mathbf{R}^2}|\psi_0|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{1}{2}, \tag{2.6.20}$$

则式 (2.6.14)~ 式 (2.6.17) 有整体弱解.

令

$$\varphi=\int_{-\infty}^{y}|\psi(t,x,\eta)|^2\mathrm{d}\eta, \tag{2.6.21}$$

则

$$\varphi_y=|\psi(t,x,y)|^2,\qquad \varphi_x=\int_{-\infty}^{y}|\psi(t,x,\eta)|_x^2\mathrm{d}\eta=\chi.$$

且式 (2.6.14)、式 (2.6.15) 等价地变为

$$\mathrm{i}\psi_t+\psi_{xx}=\varphi_x\psi, \tag{2.6.22}$$

$$\varphi_{xy}=|\psi|_x^2. \tag{2.6.23}$$

在无穷远处 ψ 为 0, φ 满足齐次散射条件

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi=0,\qquad \lim_{y\to-\infty}\varphi=0.$$

这与式 (2.6.17) 一致. 注意到守恒 (2.6.19)

$$E(t)=\int_{\mathbf{R}^2}\left(|\psi_x|^2+\frac{1}{2}\varphi_x\varphi_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=E(0), \tag{2.6.19$'$}$$

从式 (2.6.21) 知, φ 可表示为

$$\varphi=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}|\psi(t,\xi,\eta)|_\xi^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\int_{\mathbf{R}^2}H(x-\xi)H(y-\eta)|\psi(t,\xi,\eta)|_\xi^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

其中, $H(\cdot)$ 是 Heaviside 函数. 类似于 2.5 节,

令 $K(x,y)=H(x)H(y)$. 对于给定的函数 $f\in L^1(\mathbf{R}^2)$, 定义算子 K

$$\phi(x,y)=K(f)=K*f(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

引理 2.6.3 (i) K 是由 $L^1(\mathbf{R}^2)$ 到 $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ 的有界线性算子. 此外, $\phi\in C(\mathbf{R}^2)$

$$\|\phi\|_\infty\leqslant\|f\|_1, \tag{2.6.24}$$

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2}|\phi_x\phi_y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\|f\|_1^2$;

(iii) 如果在 $L^1(\mathbf{R}^2)$ 上, 当 $\epsilon\to 0$ 时, $f_\epsilon\to f$ 弱收敛, 则 $K(f_\epsilon)\to K(f)$ 在 $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ 上是逐点收敛的. 因而在 $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$ 上 $K(f_\epsilon)\to K(f)$.

证明 (i) 注意到 $\|K(\cdot,\cdot)\|_\infty=1$, 由 Young 不等式, 得式 (2.6.24).

(ii) 因为

$$\phi_x=\int_{-\infty}^{y}f(x,\eta)\mathrm{d}\eta,\quad \phi_y=\int_{-\infty}^{x}f(\xi,y)\mathrm{d}\xi,$$

得

$$\phi_x\phi_y=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(\xi,y)f(x,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

且有

$$\int_{\mathbf{R}^2}|\phi_x\phi_y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}|f(\xi,y)f(x,\eta)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\int_{\mathbf{R}^2}|f|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2. \tag{2.6.25}$$

(iii) 因为 $L^1(\mathbf{R}^2)$ 上, $f_\epsilon\to f$ 弱收敛. $\{f_\epsilon\}$ 在 $L^1(\mathbf{R}^2)$ 上是有界的. 从 (i) 知, $K(f_\epsilon)$ 在 $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ 是有界的. 对任意 $(x,y)\in\mathbf{R}^2, K(x^-\cdot,y^-\cdot)\in L^\infty(\mathbf{R}^2)$, 由控制收敛定理得当 $\epsilon\to 0$ 时

$$K(f_\epsilon)-K(f)=\int_{\mathbf{R}^2}K(x-\xi,y-\eta)(f_\epsilon(\xi,\eta)-f(\xi,\eta))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\to 0.$$

因而 $K(f_\epsilon)\to K(f)$ 是逐点的, 从而得 (iii).

利用算子 K 可将 φ 表示为 $\varphi=K(\partial/\partial x|\psi|^2)$, 式 (2.6.32)、式 (2.6.33) 可化为非局部非线性 Schrödinger 方程.

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\psi_t+\psi_{xx}=\psi\frac{\partial}{\partial x}K\left(\frac{\partial}{\partial x}|\psi|^2\right),\\&\psi(0,x,y)=\psi_0(x,y).\end{aligned} \tag{2.6.26}$$

仿照 2.5 节, 我们考虑正则化方程:

给定 $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\psi_t^\epsilon + (1+\epsilon\Delta^2)^{-1}\psi_{xx}^\epsilon = (1+\epsilon\Delta^2)^{-1}\left(\psi^\epsilon \frac{\partial}{\partial x}K\left(\frac{\partial}{\partial x}|\psi^\epsilon|^2\right)\right),\\ &\psi^\epsilon(0,x,y) = \psi_0^\epsilon(x,y),\end{aligned} \tag{2.6.27}$$

其中, $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$. 如同 2.5 节中定理 2.5.1 的证明那样, 我们将证明式 (2.6.27) 整体解的存在性, 然后取极限获得式 (2.6.26) 的解.

将式 (2.6.27) 写为抽象形式

$$\psi_t^\epsilon = A_\epsilon \psi^\epsilon - \mathrm{i}F_\epsilon(\psi^\epsilon), \qquad \psi^\epsilon(0) = \psi_0^\epsilon, \tag{2.6.28}$$

其中, $A_\epsilon = \mathrm{i}(1+\epsilon\Delta^2)^{-1}(\partial^2/\partial x^2)$, $F_\epsilon(v) = (1+\epsilon\Delta^2)^{-1}(v(\partial/\partial x)K((\partial/\partial x)|v|^2))$.

易知, 对任意取定的 $\epsilon > 0$, $\mathrm{i}A_\epsilon = -(1+\epsilon\Delta^2)^{-1}(\partial^2/\partial x^2)$ 是一个 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 上稠定的自伴算子, 定义域为 $H^2(\mathbf{R}^2)$. 它有一个线性有界扩张 $-(\partial^2/\partial x^2)(1+\epsilon\Delta^2)^{-1}$. 因而 A_ϵ 在 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 上生成一个保持 $H^2(\mathbf{R}^2)$ 不变的酉群 $\Sigma(t) = \mathrm{e}^{A_\epsilon t}$. 此外, $\Sigma(t)$ 也是 $H^2(\mathbf{R}^2)$ 上的一个酉群. 为证明解的局部存在性, 类似于 2.5 节容易证明 F_ϵ 在 $H^2(\mathbf{R}^2)$ 是局部 Lipschitz 连续的.

因此, 对任意 $\psi_0^\epsilon \in H^2(\mathbf{R}^2)$, 式 (2.6.28) 有唯一的局部解

$$\psi^\epsilon(t) \in C([0,T_0]; H^2(\mathbf{R}^2)).$$

为证明式 (2.6.27)(或式 (2.6.28)) 的解是全局的, 需要一些先验估计. 类似于方程 (2.6.22)、(2.6.23), 对式 (2.6.27) 有两个守恒律:

$$G_\epsilon(t) = \int_{\mathbf{R}^2} (|\psi^\epsilon(t)|^2 + \epsilon|\Delta\psi^\epsilon(t)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = G_\epsilon(0), \tag{2.6.29}$$

$$E_\epsilon(t) = \int_{\mathbf{R}^2} \left(|\psi_x^\epsilon|^2 + \frac{1}{2}\varphi_x^\epsilon \varphi_y^\epsilon\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = E_\epsilon(0). \tag{2.6.30}$$

其中, $\varphi^\epsilon = K((\partial/\partial x)|\psi^\epsilon|^2)$. 因而对任意 $t \geqslant 0$, $\|\psi^\epsilon(t)\|_{H^2}$ 有界, 于是得如下定理.

定理 2.6.4 对任意 $\psi_0^\epsilon \in H^2(\mathbf{R}^2)$, 式 (2.6.27) 有唯一的解 $\psi^\epsilon(t)$ 满足式 (2.6.29) 和式 (2.6.30).

接下来, 当 $\epsilon \to 0$ 时取 ψ^ϵ 和 $\varphi^\epsilon = K((\partial/\partial x)|\psi^\epsilon|^2)$ 的极限. 对 $\psi_0 \in L^2(\mathbf{R}^2)$, 取 $\psi_0^\epsilon = (1+\epsilon^{1/4}\Delta^2)^{-1}\psi_0 \in H^2(\mathbf{R}^2)$, 则

$$\|\psi_0^\epsilon\|_2 \leqslant \|\psi_0\|_2, \quad \|\psi_{0x}^\epsilon\|_2 \leqslant \|\psi_{0x}\|_2, \quad \epsilon\|\Delta\psi_0^\epsilon\|_2 \leqslant \sqrt{\epsilon}\|\psi_0\|_2. \tag{2.6.31}$$

式 (2.6.27) 的初始条件为 ψ_0^ϵ 的解 $\psi^\epsilon(t)$ 满足式 (2.6.29)、式 (2.6.30).

以下假设式 (2.6.30) 总成立, 即 $\delta = \|\psi_0\|_2^2 < \dfrac{1}{2}$. 取 $\epsilon_0 = (1-2\delta)^2/8\delta^2 > 0$. 则对任意 $0 < \epsilon \leqslant \epsilon_0$, $k = 2(1+\sqrt{\epsilon})\delta \leqslant k_0 = 2(1+\sqrt{\epsilon_0})\delta < 1$, 由式 (2.6.41) 知

$$G_\epsilon(0) = \|\psi_0^\epsilon\|_2^2 + \epsilon\|\Delta\psi_0^\epsilon\|_2^2 \leqslant (1+\sqrt{\epsilon_0})\|\psi_0\|_2^2.$$

由式 (2.6.29) 可得

$$\|\psi^\epsilon(t)\|_2^2 \leqslant G_\epsilon(0) \leqslant (1+\sqrt{\epsilon_0})\|\psi_0\|_2^2 = \frac{k_0}{2}. \tag{2.6.32}$$

又因为 $\varphi^\epsilon = K(|\psi^\epsilon|_x^2)$, 由式 (2.6.25) 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2} |\varphi_x^\epsilon||\varphi_x^\epsilon|\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\leqslant \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbf{R}^2}\left|\frac{\partial}{\partial x}|\varphi^\epsilon|^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2 \\ &\leqslant 2\|\psi^\epsilon(t)\|_2^2\|\psi_x^\epsilon(t)\|_2^2 \leqslant k\|\psi_x^\epsilon(t)\|_2^2,\end{aligned}$$

将这个不等式代入式 (2.6.30) 由于

$$E_\epsilon(0) = \int_{\mathbf{R}^2}|\psi_{0x}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2}\varphi_{0x}^\epsilon\varphi_{0y}^\epsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \|\psi_{0x}\|_2^2(1+2\|\psi_0\|_2^2),$$

得

$$\int_{\mathbf{R}^2}(|\psi_x^\epsilon|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{E_\epsilon(0)}{(1-k_0)} \leqslant \frac{1+2\delta}{(1-k_0)}\|\psi_{0x}\|_2^2. \tag{2.6.33}$$

因此得 $\|\psi^\epsilon(t)\|_2^2$ 和 $\|\psi_x^\epsilon(t)\|_2^2$ 的有界性. 所以由式 (2.6.24) 知

$$\|\varphi^\epsilon\|_\infty \leqslant \left\|\frac{\partial}{\partial x}|\varphi^\epsilon|^2\right\|_1 \leqslant 2\|\psi^\epsilon(t)\|_2\|\psi_x^\epsilon(t)\|_2 \leqslant C, \tag{2.6.34}$$

其中, $C = \sqrt{[2k_0(1+2\delta)]/(1-k_0)}\|\psi_{0x}\|_2$. 因为对任意 $w \in H^2(\mathbf{R}^2)$ 有

$$\begin{aligned}\langle\varphi_x^\epsilon\psi^\epsilon, w\rangle &= -\int_{\mathbf{R}^2}\varphi^\epsilon(\psi_x^\epsilon\bar{w} + \psi^\epsilon\bar{w}_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leqslant \|\varphi^\epsilon\|_\infty(\|\psi_x^\epsilon\|_2\|w\|_2 + \|\psi^\epsilon\|_2\|w_x\|_2),\end{aligned}$$

其中, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$ 和 $H^1(\mathbf{R}^2)$ 上的对偶积. 我们看到

$$\|\varphi_x^\epsilon\psi^\epsilon\|_{H^{-1}} \leqslant \|\varphi^\epsilon\|_\infty(\|\varphi^\epsilon\|_2 + \|\psi_x^\epsilon\|_2) \leqslant C. \tag{2.6.35}$$

因此, 由式 (2.6.27) 得

$$\|\psi_t^\epsilon(t)\|_{H^{-1}} \leqslant C, \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{2.6.36}$$

从式 (2.6.32)~ 式 (2.6.36), 我们得到, 当 $\epsilon \to 0$ 时, 存在函数 ψ, φ, h 使得有

$$\begin{aligned}
&\psi^\epsilon \to \psi \text{ 在 } L^\infty(\mathbf{R}^+; L^2(\mathbf{R}^2)) \text{ 弱 * 收敛},\\
&\psi_x^\epsilon \to \psi_x \text{ 在 } L^\infty(\mathbf{R}^+; L^2(\mathbf{R}^2)) \text{ 弱 * 收敛},\\
&\psi_t^\epsilon \to \psi_t \text{ 在 } L^\infty(\mathbf{R}^+; H^{-1}(\mathbf{R}^2)) \text{ 弱 * 收敛},\\
&\varphi^\epsilon \to \varphi \text{ 在 } L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2) \text{ 弱 * 收敛},\\
&\varphi_x^\epsilon \psi^\epsilon \to h \text{ 在 } L^\infty(\mathbf{R}^+; H^{-1}(\mathbf{R}^2)) \text{ 弱 * 收敛}.
\end{aligned} \tag{2.6.37}$$

为了表明 ψ, φ 是式 (2.6.27) 的解, 我们必须验证

$$h = \varphi_x \psi, \tag{2.6.38}$$

$$\varphi = K\left(\frac{\partial}{\partial x}|\psi|^2\right). \tag{2.6.39}$$

由于系统是退化的, 得不到可以直接取强极限以确保非局部非线性项的收敛性的 ψ^ϵ 的 $H^1(\mathbf{R}^2)$ 有界性.

对于这种情形, 必须做特殊努力在适当意义下得到 $\psi^\epsilon, \varphi^\epsilon$ 的强极限.

首先验证式 (2.6.38).

引理 2.6.5 $\varphi_x^\epsilon \in L^\infty(\mathbf{R}^+; L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2))$ 是有界的.

证明 首先有对几乎处处的 $x \in \mathbf{R}$, 对任意 $w \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ 有

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^\epsilon(x,y)|^2 \mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} \frac{\partial}{\partial x}|\psi^\epsilon(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^\epsilon||\psi_x^\epsilon| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant 2\|\psi^\epsilon\|_2 \|\psi_x^\epsilon\|_2.
\end{aligned} \tag{2.6.40}$$

令 $B_R(0) \subset \mathbf{R}^2$ 为球心在原点、半径为 $\mathbf{R}$ 包含 $\mathrm{supp}w$ 的球. 且令

$$J = \int_{\mathbf{R}^2} w|\varphi_x^\epsilon|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意到 $\varphi_x^\epsilon = \int_{-\infty}^{y} (\partial/\partial x)|\psi^\epsilon(x,\eta)|^2 \mathrm{d}\eta$, 得到

$$\begin{aligned}
|J| \leqslant& 4\int_{\mathbf{R}^2} |w| \left(\int_{-\infty}^{y} |\psi^\epsilon \psi_x^\epsilon(x,\eta)| \mathrm{d}\eta\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
\leqslant& 4\|w\|_\infty \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^\epsilon \psi_x^\epsilon(x,\eta)| \mathrm{d}\eta\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
\leqslant& 8R\|w\|_\infty \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^\epsilon(x,\eta)|^2 \mathrm{d}\eta\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_x^\epsilon(x,\eta)|^2 \mathrm{d}\eta\right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\leqslant 8R\|w\|_\infty \sup_{x\in R}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi^\epsilon(x,\eta)|^2\mathrm{d}\eta\left(\int_{-R}^{R}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_x^\epsilon(x,\eta)|^2\mathrm{d}\eta\mathrm{d}x\right)$$

$$\leqslant 8R\|w\|_\infty 2\|\psi^\epsilon\|_2\|\psi_x^\epsilon\|_2^3 \qquad (\text{由于式}(2.6.40)\leqslant C(R)).$$

在最后一个不等式中用到式 (2.6.32)、式 (2.6.33), 引理得证.

引理 2.6.6　对任意球 $B_R(0)\subset \mathbf{R}^2$, $1\leqslant p<\infty$ 及几乎处处的 $t\geqslant 0$, $\varphi^\epsilon(t)$ 在 $L^p(B_R(0))$ 中是相对紧的.

证明　由 $\varphi^\epsilon = K((\partial/\partial x)|\psi^\epsilon|^2)=\int_{-\infty}^{y}|\psi^\epsilon(x,\eta,t)|^2\mathrm{d}\eta$ 得到 $\varphi_y^\epsilon=|\psi^\epsilon|^2$. 因而由式 (2.6.32) 得到

$$\|\varphi_y^\epsilon\|_1=\|\psi^\epsilon\|_2^2\leqslant\frac{1}{2}.$$

结合引理 2.6.5, 式 (2.6.34) 与上述估计, 得

$$\varphi^\epsilon\in L^\infty(\mathbf{R}^+;W_{\mathrm{loc}}^{1,1}(\mathbf{R}^2))\cap L^\infty(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^2)$$

有界.

由于嵌入映射 $W^{1,1}(B_R(0))\longmapsto L^1(B_R(0))$ 是紧致的, 可以选取一子族 (表示为 φ^ϵ) 使得 φ^ϵ 对几乎处处的 $t\geqslant 0$ 在 $L^1(B_R(0))$ 中收敛. 因此, 对任意的 $1\leqslant p<\infty$, 当 $\epsilon_1,\epsilon_2\to 0$, 有

$$\begin{aligned}&\|\varphi^{\epsilon_1}(t)-\varphi^{\epsilon_2}(t)\|_{L_p(B_R(0))}\\ \leqslant&\|\varphi^{\epsilon_1}(t)-\varphi^{\epsilon_2}(t)\|_{L(B_R(0))}^{p}(\|\varphi^{\epsilon_1}(t)\|_\infty+\|\varphi^{\epsilon_2}(t)\|_\infty)^{1-(1/p)}\to 0.\end{aligned}$$

因此, $\varphi^\epsilon(t)$ 在 $L^p(B_R(0))$ 中是相对紧的.

引理 2.6.7　$\forall r>2, T>0, \varphi_x^\epsilon\psi^\epsilon\to\varphi_x\psi$ 弱 * 收敛于 $L^\infty(0,T;W^{-1,r'}(\mathbf{R}^2))$, 其中 $r'=r/(r-1)$, 即式 (2.6.38) 成立.

证明　对任意 $v\in L^1(0,T), w\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$.

$$\begin{aligned}\int_0^T\langle\varphi_x^\epsilon\psi^\epsilon-\varphi_x\psi, vw\rangle_{1,r}\mathrm{d}t&=-\int_0^T\bar v(t)\int_{\mathbf{R}^2}(\varphi^\epsilon(\psi^\epsilon\bar w)_x-\varphi(\psi\bar w)_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\\&=-\int_0^T\bar v(t)\int_{\mathbf{R}^2}\varphi((\psi^\epsilon-\psi)\bar w)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\\&=-\int_0^T\bar v(t)\int_{\mathbf{R}^2}(\varphi^\epsilon-\varphi)(\psi^\epsilon\bar w)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t,\qquad(2.6.41)\end{aligned}$$

其中, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,r}$ 表示 $W^{-1,r'}(\mathbf{R}^2)$ 与 $W^{1,r}(\mathbf{R}^2)$ 的对偶积. 因为 $\psi^\epsilon-\psi,\psi_x^\epsilon-\psi_x\to 0$ 弱 * 收敛于 $L^\infty(0,T;L^2(\mathbf{R}^2))$, $\bar v\varphi\bar w,\bar v\varphi\bar w_x$ 在 $L^1(0,T;L^2(\mathbf{R}^2))$. 式 (2.6.41) 右端的第一

个积分趋于 0. 令 $B_R(0)$ 为一包含 $\mathrm{supp}w, p=2r/(r-2)>2$ 的球. 从引理 2.6.6, 我们有：当 $\epsilon\to 0$ 时

$$\left|\int_{\mathbf{R}^2}(\varphi^\epsilon-\varphi)(\psi^\epsilon\bar{w})_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\|\varphi^\epsilon-\varphi\|_{L_p(B_R(0))}(\|\psi_x^\epsilon\|_2\|w\|_r+\|\psi^\epsilon\|_2\|w_x\|_r)\to 0.$$

因此, 当 $\epsilon\to 0$ 时, 式 (2.6.51) 的最后一个积分趋向于 0. 综合此与式 (2.6.37) 的最后一个极限, 可得式 (2.6.38) 成立.

验证式 (2.6.39).

事实上式 (2.6.39) 等价于式 (2.6.22). 为验证式 (2.6.39), 将利用 ψ^ϵ 在 $L^2((0,T)\times\mathbf{R}^2)$ 的强收敛性. 首先证明极限函数 ψ, 视 φ_x 为其势, 在 $L^\infty(\mathbf{R}^+;H^{-1}(\mathbf{R}^2))$ 的意义下, 满足下列的退化的 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\psi_t+\psi_{xx}=\varphi_x\psi. \tag{2.6.42}$$

引理 2.6.8 令 $\varphi\in L^\infty(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^2),\varphi_x\in L^\infty(\mathbf{R}^+;L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2))$, ψ 是式 (2.6.52) 的满足 $\psi,\psi_x\in L^\infty(\mathbf{R}^+;L^2(\mathbf{R}^2))$ 的解, 则下列守恒律成立

$$\|\psi(t)\|_2=\|\psi(0)\|_2,\qquad\forall t\geqslant 0. \tag{2.6.43}$$

注 由于不能证明 $\psi\in H^1(\mathbf{R}^2)$, 不能简单地用 ψ 与式 (2.6.42) 取对偶积获得守恒律. 事实上, 我们既不知道

$$\mathrm{Im}\langle\mathrm{i}\psi_t,\psi\rangle=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi(t)\|_2^2,$$

也不知道

$$\mathrm{Im}\langle\varphi_t\psi,\psi\rangle=0,$$

其中, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$ 与 $H^1(\mathbf{R}^2)$ 的对偶积. 我们不得不通过磨光 ψ 来克服这些困难.

证明 设 $\rho\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, 满足 $\rho\geqslant 0,\rho(-x,-y)=\rho(x,y)$, 且 $\int_{R^2}\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$. 令 $\rho_\epsilon(x,y)=\epsilon^{-2}\rho(x/\epsilon,y/\epsilon)$, 则 $u_\epsilon=\psi*\rho_\epsilon$ 满足

$$\begin{aligned}&u_\epsilon\in L^\infty(\mathbf{R}^+;H^\infty(\mathbf{R}^2)),\\&u_{\epsilon t}\in L^2(\mathbf{R}^+;H^\infty(\mathbf{R}^2)),\end{aligned} \tag{2.6.44}$$

当$\epsilon\to 0$时,

$$\|u_\epsilon-\psi\|_2\to 0,\qquad\|u_{\epsilon x}-\psi_x\|_2\to 0, \tag{2.6.45}$$

$$\mathrm{i}u_{\epsilon t}+u_{\epsilon xx}=(\varphi_x\psi)*\rho_\epsilon. \tag{2.6.46}$$

其中 $(\varphi_x\psi)*\rho_\epsilon$ 定义为

$$\begin{aligned}\langle(\varphi_x\psi)*\rho_\epsilon,w\rangle&=\left\langle\varphi_x\psi,\int_{\mathbf{R}^2}w(\xi,\eta)\rho_\epsilon(\xi-\cdot,\eta-\cdot)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right\rangle\\&=\langle\varphi_x\psi,w*\rho_\epsilon\rangle,\qquad\forall w\in H^1(\mathbf{R}^2).\end{aligned}$$

这是由于 ρ_ϵ 的对称性. 取式 (2.6.46) 与 u_ϵ 的对偶积然后取其虚部可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_\epsilon\|_2^2=\mathrm{Im}\langle(\varphi_x,\psi)*\rho_\epsilon,u_\epsilon\rangle.$$

由于 u_ϵ 满足式 (2.6.44), 这是有意义的. 注意到 $\mathrm{Im}\langle(\varphi_x,\psi)*\rho_\epsilon,u_\epsilon\rangle=0$, 有

$$\|u_\epsilon(t)\|_2-\|u_\epsilon(0)\|_2=\int_0^t\mathrm{Im}\,\langle(\varphi_x\psi)*\rho_\epsilon-\varphi_x\,(\psi*\rho_\epsilon)\,u_\epsilon\rangle\,\mathrm{d}t.\tag{2.6.47}$$

将证明当 $\epsilon\to0$ 时, 式 (2.6.47) 右边的积分趋于零. 对任意的 $w\in H^1(\mathbf{R}^2)$,

$$\begin{aligned}I(w)=&\langle(\varphi_x\psi)*\rho_\epsilon-(\psi*\rho_\epsilon),w\rangle\\=&\langle(\varphi\psi)_x*\rho_\epsilon,w\rangle-\langle(\varphi\psi_x)*\rho_\epsilon,w\rangle-\langle\varphi_x(\psi*\rho_\epsilon),w\rangle\\=&\langle(\varphi\psi)_x,w*\rho_\epsilon\rangle-\langle\varphi\psi_x,w*\rho_\epsilon\rangle-\langle\varphi_x(\psi*\rho_\epsilon),w\rangle\\=&-\int_{\mathbf{R}^2}\varphi\psi(\bar{w}*\rho_\epsilon)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\mathbf{R}^2}\varphi\psi_x(\bar{w}*\rho_\epsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\int_{\mathbf{R}^2}\varphi(\psi*\rho_\epsilon)_x\bar{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\mathbf{R}^2}\varphi(\psi*\rho_\epsilon)\bar{w}_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\int_{\mathbf{R}^2}\varphi[(\psi*\rho_\epsilon)\bar{w}_x-\psi(\bar{w}*\rho_\epsilon)_x]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\int_{\mathbf{R}^2}\varphi[(\psi*\rho_\epsilon)_x\bar{w}-\psi_x(\bar{w}*\rho_\epsilon)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\int_{\mathbf{R}^2}\varphi\bar{w}_x(\psi*\rho_\epsilon-\psi)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\mathbf{R}^2}\varphi\psi(\bar{w}_x*\rho_\epsilon-\bar{w}_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\int_{\mathbf{R}^2}\varphi\bar{w}(\psi_x*\rho_\epsilon-\psi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\mathbf{R}^2}\varphi\psi_x(\bar{w}*\rho_\epsilon-\bar{w})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}|I(w)|\leqslant&\|\varphi\|_\infty(\|w_x\|_2\|\psi*\rho_\epsilon-\psi\|_2+\|\psi\|_2\|w_x*\rho_\epsilon-w_x\|_2\\&+\|w\|_2\|\psi_x*\rho_\epsilon-\psi_x\|_2+\|\psi_x\|_2\|w*\rho_\epsilon-w\|_2).\end{aligned}$$

特别地, 取 $w=u_\epsilon=\psi*\rho_\epsilon$, 注意到由式 (2.6.45),

$$\|u_\epsilon*\rho_\epsilon-u_\epsilon\|_2=\|(u_\epsilon-\psi)*\rho_\epsilon\|_2\leqslant\|u_\epsilon-\psi\|_2\to0,$$

$$\|u_{\epsilon x} * \rho_\epsilon - u_\epsilon\|_2 = \|(u_{\epsilon x} - \psi) * \rho_\epsilon\|_2 \leqslant \|u_{\epsilon x} - \psi_x\|_2 \to 0,$$

我们得到当 $\epsilon \to 0$ 时,

$$|I(u_\epsilon)| \leqslant \|\varphi\|_\infty(\|\psi\|_2 + \|\psi_x\|_2)(\|u_\epsilon - \psi\|_2 + \|u_{\epsilon x} - \psi_x\|_2) \to 0.$$

因此

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^t \mathrm{Im}I(u_\epsilon(t))\mathrm{d}t = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^t \mathrm{Im}\langle(\varphi_x\psi) * \rho_\epsilon - \varphi_x(\psi * \rho_\epsilon), u_\epsilon\rangle\mathrm{d}t = 0.$$

从而引理得证.

现在我们证明 ψ^ϵ 的强收敛性.

一方面, 因为在 $L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}^2))$ 中 $\psi^\epsilon \to \psi$, 我们有

$$\begin{aligned}\liminf_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}|\psi^\epsilon(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t &\geqslant \int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}|\psi(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}|\psi_0|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t = T\|\psi_0\|_2^2.\end{aligned}$$

另一方面, 因为 ψ^ϵ 满足式 (2.6.29), 对任意 $T>0$, 有

$$\int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}|\psi^\epsilon(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t + \int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}\epsilon|\Delta\psi^\epsilon(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t = G_\epsilon(0)T.$$

由式 (2.6.31) 得

$$T\|\psi_0\|_2^2 = \liminf_{\epsilon\to 0} TG_\epsilon(0) \geqslant \liminf_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}|\psi^\epsilon(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t.$$

由守恒定律式 (2.6.43) 得到

$$\liminf_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}|\psi^\epsilon(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t \leqslant \int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}|\psi(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t.$$

因此

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}|\psi^\epsilon(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t = \int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}|\psi(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t.$$

从而我们证明了如下引理.

引理 2.6.9 对任意的 $T>0, \psi^\epsilon \to \psi$ 强收敛于 $L^2((0,T)\times\mathbf{R}^2)$.

现在我们验证式 (2.6.39), 然后完成定理 2.6.2 的证明.

令 $f_\epsilon = |\psi^\epsilon|_x^2, f = |\psi|_x^2$, 则

$$f_\epsilon - f = 2\mathrm{Re}(\bar{\psi}^\epsilon - \bar{\psi})\psi_x^\epsilon + 2\mathrm{Re}\bar{\psi}(\psi_x^\epsilon - \psi_x),$$

对任意 $w \in L^2(0,T;L^\infty(\mathbf{R}^2))$,

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}(f_\epsilon - f)\bar{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&2\int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}\bar{w}\mathrm{Re}((\bar{\psi}^\epsilon-\bar{\psi}))\psi_x^\epsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}\bar{w}\mathrm{Re}(\bar{\psi}(\psi^\epsilon-\psi))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&I_1+I_2.\end{aligned}$$

由引理 2.6.9 得到

$$|I_1| \leqslant 2\|w\|_{L^2(0,T;L^\infty)}\cdot\sup_{[0,T]}\|\psi_x^\epsilon\|_2\cdot\|\psi^\epsilon-\psi\|_{L^2((0,T)\times\mathbf{R}^2)}\to 0.$$

因为在 $L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}^2))$ 中, $\psi_x^\epsilon \to \psi_x, I_2 \to 0$. 从而在 $L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}^2))$ 中, f_ϵ 弱收敛于 f. 应用引理 2.6.3(iii) 我们得到 $\varphi^\epsilon = K(f_\epsilon)$在$L^2(0,T;L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2))$中强收敛于$K(f)$. 综合这点和式 (2.6.37) 的第四个极限, 我们得到式 (2.6.39). 因此定理 2.6.2 证完.

2.6.3　解的爆破

结果表明, 如果正则解局部存在且初始条件满足一定的条件, 它们将在有限时间内爆破.

引理 2.6.10　令 ψ 为满足 $\psi, x\psi \in L^2(\mathbf{R}^2)$ 和 χ 在无穷远处为零的式 (2.6.14)、式 (2.6.15) 的解, 并令

$$I(t)=\int_{\mathbf{R}^2}x^2|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2.6.48}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=4\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}^2}x\psi\bar{\psi}_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2.6.49}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2I(t)}{\mathrm{d}t}=8E(0). \tag{2.6.50}$$

证明　由直接的计算, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=&2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}^2}x^2\psi\bar{\psi}_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathbf{2Re}\int_{\mathbf{R}^2}x^2\psi\cdot\mathrm{i}(\chi\bar{\psi}-\bar{\psi}_{xx})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&-2\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}^2}(x^2\psi)_x\bar{\psi}_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}^2}x\psi\bar{\psi}_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因此得到式 (2.6.49).

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 I(t)}{\mathrm{d}t^2} =& -4\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}^2} x(\psi_t\bar{\psi}_x+\psi\bar{\psi}_{xt})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=& -4\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}^2}(-\mathrm{i})x\bar{\psi}_x(\chi\psi-\psi_{xx})\mathrm{d}x\mathrm{d}y-4\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}^2}\mathrm{i}x\psi(\chi\bar{\psi}-\bar{\psi}_{xx})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=& -4\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}^2}x\chi\psi\bar{\psi}_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y-4\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}^2}x\bar{\psi}_x\psi_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&+4\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}^2}(x\psi)_x\chi\bar{\psi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-4\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}^2}(x\psi)_x\bar{\psi}_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&2\int_{\mathbf{R}^2}x\chi|\psi|_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\int_{\mathbf{R}^2}x(|\psi_x|^2)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&+4\int_{\mathbf{R}^2}\chi|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+4R\int_{\mathbf{R}^2}x\chi\bar{\psi}\psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&-4\int_{\mathbf{R}^2}\psi\bar{\psi}_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-4\int_{\mathbf{R}^2}x\psi_x\bar{\psi}_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y(\text{由于式 (2.6.15)})\\
=&2\int_{\mathbf{R}^2}x\chi\chi_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\int_{\mathbf{R}^2}x|\psi_x|_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+4\int_{\mathbf{R}^2}\chi|\psi|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&+2\int_{\mathbf{R}^2}x\chi\chi_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+4\int_{\mathbf{R}^2}|\psi_x|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\int_{\mathbf{R}^2}x(|\psi_x|^2)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&8\int_{\mathbf{R}^2}|\psi_x|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+4\int_{\mathbf{R}^2}\chi|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8E(0),
\end{aligned}$$

其中, 由于 $\int_{\mathbf{R}^2}x\chi\chi_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$, 引理得证.

定理 2.6.11 令 $\psi_0\in L^2(\mathbf{R}^2)$ 且 $x\psi_0\in L^2(\mathbf{R}^2)$, 其中 ψ 是初始函数 ψ_0 满足 $\psi, x\psi\in L^2(\mathbf{R}^2)$ 而且 χ 在无穷远处为零的式 (2.6.14)、式 (2.6.15) 的解, 如果下列条件之一成立

(i) $E(0)<0$;

(ii) $E(0)=0$, 且 $\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}^2}x\psi_0\bar{\psi}_{0x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$;

(iii) $E(0)<0$, 且 $\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}^2}x\psi_0\bar{\psi}_{0x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 4\sqrt{E(0)I(0)}$,

则

$$\liminf_{t\to T^*}\|\psi_x\|_2^2=\infty,$$

即解在有限时间内爆破.

证明 由式 (2.6.50) 可得

$$I(t)=4E(0)t^2+I'(0)t+I(0).$$

如果定理中的条件有一个成立, 则存在 $T^* > 0$ 使得 $I(T^*) = 0$, 从

$$\|\psi_0\|_2^2 = \|\psi(t)\|_2^2 = \mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}^2}(-2)x\psi\bar{\psi}_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant 2\|x\psi\|_2\|\psi_x\|_2,$$

得到

$$\liminf_{t\to T^*}\|\psi_x\|_2 \geqslant \lim_{t\to T^*}\frac{\|\psi_0\|_2^2}{2\sqrt{I(t)}} = \infty.$$

因此, 解将在 T^* 时爆破.

第 3 章　孤立子解和周期孤立子解

DS 方程是可积系统, 具有孤立子、线状孤立子、周期孤立子、N- 孤立子、envelope-hole(包络 – 空穴) 解、dromions 解 (局部孤立波)、solitoff 解 (半无穷孤立波) 和双周期解等, 孤立子的显式表示和相互作用是重要的研究课题, 本章我们首先介绍求解 DS 方程孤立子解的几种方法, 包括 Darboux 变换法、双线性形 (Hirota) 法、双孤子法、逆散射法、谱变换法和齐次平衡法 (F 展开法), 以及 Theta 函数法, 然后介绍 DS 方程孤立波的相互作用, 包括两个周期孤立波的相互作用、周期孤立波与线孤立波的相互作用, 以及驻波的稳定和不稳定性结果.

3.1　Darboux 变换法

我们先给出可积偏微分方程的一般定义.

定义 3.1.1　如果存在一对线性微分方程组

$$\Phi_x = U\Phi, \qquad \Phi_t = V\Phi \tag{3.1.1}$$

(U, V 均为方阵且与 Φ 无关), 使得某一偏微分方程成为式 (3.1.1) 的相容性条件

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \qquad [U, V] = UV - VU, \tag{3.1.2}$$

则我们称这个偏微分方程是可积的. 方程 (3.1.1) 称为这个偏微分方程的 Lax 对.

定义表明偏微分方程的可积性等价于它的 Lax 对的存在性. 我们称具有一般形式的 Lax 对的可积系统为 AKNS 系统, 考虑具有 2×2 矩阵形式的 1+2 维 AKNS 系统

$$\begin{cases} \Phi_y = J\Phi_x + P\Phi, \\ \Phi_t = \displaystyle\sum_{j=0}^{2} V_{2-j}\partial^j \Phi, \end{cases} \tag{3.1.3}$$

其中,

$$J = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -\epsilon\bar{u} & 0 \end{pmatrix},$$

$\alpha = \pm 1$ 或 $\pm \mathrm{i}, \epsilon = \pm 1, V_0 = \dfrac{2\mathrm{i}}{\alpha} J, V_1 = \dfrac{2\mathrm{i}}{\alpha} P$.

$$V_2 = \frac{\mathrm{i}}{\alpha} \begin{pmatrix} \omega_1 & u_x + u_y/\alpha \\ -\epsilon \bar{u}_x + \epsilon \bar{u}_y/\alpha & \omega_2 \end{pmatrix}.$$

其中, u, ω_1, ω_2 都是 x, y, t 的复值函数; $\bar{u}$ 是 u 的复共轭. 如果 V_j 与 u 之间有一定的关系, 则我们称为约化 (谷超豪等 1999, Cao C W 1989, Cheng Y 1992), 否则称为无约化. 将上述代入式 (3.1.3), 利用可积性条件 $\Phi_{yt} = \Phi_{ty}$, 即将式 (3.1.3) 的第一式对 t 微分, 将 Φ_t 用式 (3.1.3) 的第二式代入, 然后将式 (3.1.3) 的第二式对 y 微分, 将 Φ_y 用式 (3.1.3) 的第一式代入, 再令 $\Phi_{yt} = \Phi_{ty}$, 我们得到

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t = -u_{xx} - \dfrac{1}{\alpha} u_{yy} - \dfrac{1}{\alpha} u(\omega_1 - \omega_2), \\ \omega_{1,y} - \alpha \omega_{1,x} = \epsilon(|u|^2)_x + \dfrac{\epsilon}{\alpha}(|u|^2)_y, \\ \omega_{2,y} + \alpha \omega_{2,x} = \epsilon(|u|^2)_x - \dfrac{\epsilon}{\alpha}(|u|^2)_y, \end{cases} \tag{3.1.4}$$

并且有 $\omega_2 - \omega_1 = \alpha^2(\omega_2 - \omega_1)$. 记

$$v = -\epsilon |u|^2 + \frac{\alpha}{2}(\omega_1 - \omega_2), \tag{3.1.5}$$

则方程组 (3.1.4) 成为

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t = -u_{xx} - \dfrac{1}{\alpha^2} u_{yy} - \dfrac{2\epsilon}{\alpha^2}|u|^2 u - \dfrac{2}{\alpha^2} uv, \\ v_{yy} - \alpha^2 v_{xx} - 2\alpha^2 \epsilon(|u|^2)_{xx} = 0. \end{cases} \tag{3.1.6}$$

式 (3.1.5) 中 u 是复的未知函数, v 是实的未知函数. 若 $\epsilon = 1, \alpha = \pm 1$, 则式 (3.1.6) 称为 DSI 方程; 若 $\epsilon = 1, \alpha = \pm \mathrm{i}$, 则式 (3.1.6) 称为 DSII 方程. 由可积性定义知, DS 方程是可积方程. 对于可积非线性偏微分方程的求解, 一种行之有效的方法称为 Darboux 变换.

定义 3.1.2 可积非线性偏微分方程两个解之间的变换称为 Bäcklund 变换, 也称为 Darboux 变换.

利用 Darboux 变换, 我们可以从方程的一个解求出另一个新解. 首先考虑 DSII 方程. DSII 方程的 Darboux 变换涉及一阶 Darboux 算子 [Gu C H 1992, Gu C H et al. 1994, Zhou Z X 1988, 1990, 1992, 1993, 1996), 我们给出如下定义:

考虑 Lax 对

$$\begin{cases} \Phi_y = U(\partial)\Phi, \\ \Phi_t = V(\partial)\Phi, \end{cases} \tag{3.1.7}$$

其中, $U(\partial)=U(x,y,t,\partial)$, $V(\partial)=V(x,y,t,\partial)$.

定义 3.1.3 关于 x 的微分算子 $D(x,y,t,\partial)$ 称为 Darboux 算子, 如果存在关于 x 的微分算子 $U'(\partial),V'(\partial)$, 使得方程 (3.1.7) 通过变换 $\Phi'=D(\partial)\Phi$ 成为

$$\begin{cases}\Phi'_y=U'(\partial)\Phi',\\ \Phi'_t=V'(\partial)\Phi'.\end{cases}\tag{3.1.8}$$

由 $D(\partial)$ 导出的变换 $(\Phi,U(\partial),V(\partial))\to(\Phi',U'(\partial),V'(\partial))$ 称为 Darboux 变换, 形如 $D(x,y,t,\partial)=\partial-S(x,y,t)$ 的 Darboux 算子称为一阶 Darboux 算子.

对于一阶 Darboux 算子, 有如下定理.

定理 3.1.4 (谷超豪等 1999) $\partial-S$ 是式 (3.1.7) 的 Darboux 算子的充要条件是 S 满足如下方程:

$$S_y+[S,U(S)]=(U(S))_x,S_t+[S,V(S)]=(V(S))_x.\tag{3.1.9}$$

证明 见文献 (谷超豪等 1999).

定理 3.1.5 (谷超豪等 1999, Cheng Y 1992, Gu C H 1992) $\partial-S$ 是式 (3.1.7) 的 Darboux 算子的充要条件是存在式 (3.1.7) 的 $N\times N$ 非退化矩阵解 H, 使得 $S=H_xH^{-1}$.

证明 为证明充分性, 只须验证 S 满足式 (3.1.9). 利用式 (3.1.8), 得到

$$\begin{aligned}S_y&=H_{xy}H^{-1}-SH_yH^{-1}=(U(S)H)_xH^{-1}-SU(S)\\&=[U(S),S]+(U(S))_x,\end{aligned}$$

这正是式 (3.1.8) 的第一式, 第二式类似.

为证明必要性, 假设 S 满足式 (3.1.9), 考虑方程组

$$\begin{cases}H_x=SH,\\ H_y=U(\partial)H,\\ H_t=V(\partial)H\end{cases}$$

是否有解. 显然上式等价于

$$\begin{cases}H_x=SH,\\ H_y=U(S)H,\\ H_t=V(S)H,\end{cases}\tag{**}$$

于是只须验证上式的可积条件.

取 $\Psi_x=S\Psi$ 的基本解 Ψ, 由式 (3.1.9) 的第一式, 我们有

$$(\Psi_y-U(\partial)\Psi)_x=(S\Psi)_y-\partial U(\partial)\Psi=S(\Psi_y-U(\partial)\Psi),$$

于是有

$$\begin{aligned}&(V_y(\partial)+V(\partial)U(\partial))\Psi\\=&(V(\partial)\Psi)_y-V(\partial)(\Psi_y-U(\partial)\Psi)\\=&(V(S)\Psi)_y-V(S)(\Psi_y-U(S)\Psi)\\=&V(S)_y\Psi+V(S)U(S)\Psi.\end{aligned}$$

类似地有

$$(U_t(\partial)+U(\partial)V(\partial))\Psi=U(S)_t\Psi+U(S)V(S)\Psi.$$

因为 $\det\Psi\neq0$, 由式 (3.1.8) 的可积性条件给出

$$U(S)_t-V(S)_y+[U(S),V(S)]=0,$$

所以可积性条件 $H_{yt}=H_{ty}$ 成立.

定理 3.1.4 则给出另外两个可积性条件 $H_{xy}=H_{yx}$ 和 $H_{xt}=H_{tx}$, 于是知道 (**) 是可积的. 对于 $(t,x,y)=(t_0,x_0,y_0)$ 时的初始条件 $H=H_0$, (**) 存在解 H, 如 H_0 非退化, 则至少在 (t_0,x_0,y_0) 的一个邻域中非退化, 即 (**) 存在非退化 H 解, 这时, $S=H_xH^{-1}$. 证完.

下面我们寻求 DSII 方程的显式孤立波解.

在式 (3.1.5) 中我们取 $\epsilon=1,\alpha=\mathrm{i},\omega_2=\bar\omega_1$, 于是有

$$v=-|u|^2+\frac{\mathrm{i}}{2}(\omega_1-\bar\omega_1).$$

从而 J,P,V 为

$$J=\mathrm{i}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\tag{3.1.10}$$

$$P=\begin{pmatrix}0&u\\-\bar u&0\end{pmatrix},\tag{3.1.11}$$

$V_0=2J,V_1=2P$,

$$V_2=\begin{pmatrix}\omega_1&u_x-\mathrm{i}\bar u_y\\-\bar u_x-\mathrm{i}\bar u_y&\bar\omega_1\end{pmatrix}.\tag{3.1.12}$$

容易计算, J,P,V 具有如下性质:

$$\bar J=\sigma J\sigma^{-1},\quad \bar P=\sigma P\sigma^{-1},\quad \bar V_j=\sigma V_j\sigma^{-1}\quad(j=0,1,2),\tag{3.1.13}$$

这里

$$\sigma=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\tag{3.1.14}$$

$\bar{P}$ 表示矩阵 P 的复共轭阵. 在上述情形, 方程组 (3.1.6) 成为

$$\mathrm{i}u_t = -u_{xx} + u_{yy} + 2|u|^2 u + 2uv, \quad v_{xx} + v_{yy} + 2(|u|^2)_{xx} = 0, \tag{3.1.15}$$

它的 Lax 对是

$$\Phi_y = J\Phi_x + P\Phi, \qquad \Phi_t = 2J\Phi_{xx} + 2P\Phi_x + V_2\Phi, \tag{3.1.16}$$

其中 J, P, V_2 见式 (3.1.11)、式 (3.1.12), 而

$$v = -|u|^2 + \frac{\mathrm{i}}{2}(\omega_1 - \bar{\omega}_1). \tag{3.1.17}$$

对于式 (3.1.16), 我们构造 Darboux 算子如下:

如果 $(\xi, \eta)^{\mathrm{T}}$ 是式 (3.1.16) 的解, 则可直接验证 $(-\bar{\eta}, \xi)^{\mathrm{T}}$ 也是它的解, 从而我们取

$$H = \begin{pmatrix} \xi & -\bar{\eta} \\ \eta & \bar{\xi} \end{pmatrix}. \tag{3.1.18}$$

$$S = H_x H^{-1} = \frac{1}{|\xi|^2 + |\eta|^2} \begin{pmatrix} \bar{\xi}\xi_x + \eta\bar{\eta}_x & \bar{\eta}\xi_x - \xi\bar{\eta}_x \\ \bar{\xi}\eta_x - \eta\bar{\xi}_x & \xi\bar{\xi}_x + \bar{\eta}\eta_x \end{pmatrix}. \tag{3.1.19}$$

由于 H 满足条件 $\bar{H} = \sigma H \sigma^{-1}, S$ 也满足条件 $\bar{S} = \sigma S \sigma^{-1}$, 由

$$U'(\partial)(\partial - S) = (\partial - S)U(\partial) - S_y, \qquad V'(\partial)(\partial - S) = (\partial - S)V(\partial) - S_t,$$

得到

$$\bar{U}' = \sigma U' \sigma^{-1}, \qquad \bar{V}' = \sigma V' \sigma^{-1}. \tag{3.1.20}$$

于是 Darboux 变换保持式 (3.1.13) 的约化关系不变. 经过 Darboux 算子 $\partial - S$ 的作用, 我们得到

$$P' = P + [J, S], \qquad V_2' = V_2 + V_{1,x} + 2V_0 S_x + [V_0, S]S + [V_1, S], \tag{3.1.21}$$

从而我们得到 DSII 方程的新解

$$\begin{aligned} u' &= u + 2\mathrm{i}S_{12} = u + 2\mathrm{i}\frac{\bar{\eta}\xi_x - \xi\bar{\eta}_x}{|\xi|^2 + |\eta|^2}, \\ v' &= v - 2(\mathrm{Re}S_{11})_x = v - (\ln(|\eta|^2 + |\xi|^2))_{xx}. \end{aligned} \tag{3.1.22}$$

下面我们取特定的解具体求出 DSII 方程的孤子解.

如果我们取初始解 $u = 0, v = 0$, 这时式 (3.1.15), 式 (3.1.16) 取简单形式, 从式 (3.1.15), 式 (3.1.16) 我们取 $\xi = \xi(x + \mathrm{i}y, t), \eta = \eta(x - \mathrm{i}y, t)$ 使之满足条件

$\xi_t = 2\mathrm{i}\xi_{xx}, \eta_t = -2\mathrm{i}\eta_{xx}$, 再特取 $\xi = \mathrm{e}^{\alpha x+\mathrm{i}\alpha y+2\mathrm{i}\alpha^2 t}, \eta = \mathrm{e}^{\bar{\beta}x-\mathrm{i}\bar{\beta}y-2\mathrm{i}\bar{\beta}^2 t}$, 代入式 (3.1.22), 我们得到 DSII 方程的线状双孤子解

$$u = \frac{2\mathrm{i}(\alpha-\beta)\mathrm{e}^{(\alpha+\beta)x+\mathrm{i}(\alpha+\beta)y+2\mathrm{i}(\alpha^2+\beta^2)t}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{Re}\alpha x-2\mathrm{Im}\alpha y-2\mathrm{Im}(\alpha^2)t}+\mathrm{e}^{2\mathrm{Re}\beta x-2\mathrm{Im}\beta y-2\mathrm{Im}(\beta^2)t}}, \tag{3.1.23a}$$

$$v = -\frac{4(\mathrm{Re}\alpha-\mathrm{Re}\beta)^2\mathrm{e}^{2\mathrm{Re}(\alpha+\beta)x-2\mathrm{Im}(\alpha+\beta)y-2\mathrm{Im}(\alpha^2+\beta^2)t}}{(\mathrm{e}^{2\mathrm{Re}\alpha x-2\mathrm{Im}\alpha y-2\mathrm{Im}(\alpha^2)t}+\mathrm{e}^{2\mathrm{Re}\beta x-2\mathrm{Im}\beta y-2\mathrm{Im}(\beta^2)t})^2}. \tag{3.1.23b}$$

对于 DSI 方程, 我们用非线性约束方法, 通过构造 Darboux 变换获得孤立波解.

定义 3.1.6(谷超豪等 1999) 从方程的 Lax 对出发, 通过添加约束条件得到关于各个自变量的导数的全部显式出现的 Lax 对的方法称为非线性约束方法. 对于 DSI 方程, 我们仍然使用一阶 Darboux 变换 $\partial - s(x,y,t)$. 从 Lax 对出发, 在式 (3.1.6) 中我们令 $\alpha = 1, \epsilon = 1$, 则有 DSI 方程

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}u_t &= u_{xx}+u_{yy}+u(\omega_1-\omega_2), \\ \omega_{1x}-\omega_{1y} &= -(\partial_x-\partial_y)|u|^2, \\ \omega_{2x}+\omega_{2y} &= (\partial_x-\partial_y)|u|^2, \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

它所对应的 Lax 对是

$$\Psi_y = J\Psi_x + U\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Psi_x + \begin{pmatrix} 0 & u \\ -\bar{u} & 0 \end{pmatrix}\Phi,$$

$$\Psi_t = 2\mathrm{i}J\Psi_{xx} + 2\mathrm{i}U\Psi_x + Q\Psi = 2\mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Psi_{xx}$$

$$+2\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & u \\ -\bar{u} & 0 \end{pmatrix}\Psi_x + \begin{pmatrix} \mathrm{i}\omega_1 & \mathrm{i}(u_x+u_y) \\ -\mathrm{i}(\bar{u}_x-\bar{u}_y) & \mathrm{i}\omega_2 \end{pmatrix}\Psi. \tag{3.1.25}$$

我们引入线性系统

$$\phi_x = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\lambda I & \mathrm{i}F \\ \mathrm{i}F^* & 0 \end{pmatrix}\Phi, \qquad \Phi_y = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\lambda J+U & \mathrm{i}JF \\ \mathrm{i}F^*J & 0 \end{pmatrix}\Phi,$$

$$\Phi_t = V\Phi = \sum_{j=0}^{2}\begin{pmatrix} W_j & X_j \\ -X_j^* & Z_j \end{pmatrix}\lambda^{2-j}\Phi, \tag{3.1.26}$$

其中, λ 是添加的谱参数; F 是新引入的 $2\times s(s\geqslant 1)$ 阶矩阵值函数; W_j, X_j, Z_j 分别是待定的 $2\times 2, 2\times s, s\times s$ 阶矩阵值函数, 从而上式右端的系数矩阵都是 $(2+s)\times(2+s)$ 阶的. 利用式 (3.1.26) 的可积性条件可以确定 W_j, X_j, Z_j, 并得到 U, F 之间的关系.

我们特别选取

$$W_0|_{U=F=0} = -2\mathrm{i}J, \qquad W_1|_{U=F=0} = 0, \qquad W_2|_{U=F=0} = 0,$$

则由式 (3.1.25) 的可积性条件 $\Phi_{xy} = \Phi_{yx}$, $\Phi_{xt} = \Phi_{tx}$, 得到

$$V = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i}J\lambda^2 - 2U\lambda + W_2 & -2\mathrm{i}JF\lambda - 2JF_x - 2UF \\ -2\mathrm{i}F^*J\lambda + 2F_x^*J - 2F^*U & -2\mathrm{i}F^*JF \end{pmatrix}, \tag{3.1.27}$$

其中, W_2 由下式给出:

$$W_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i}|u|^2 + 2\mathrm{i}q_1 & \mathrm{i}u_y \\ -\bar{u}_y & -\mathrm{i}|u|^2 - 2\mathrm{i}q_2 \end{pmatrix}, \tag{3.1.28}$$

q_1, q_2 是新引入的函数. 计算式 (3.1.26) 的可积性条件, 得到 U, F, q_1, q_2 必须满足如下的方程:

$$F_y = JF_x + UF,$$

$$F_t = 2\mathrm{i}JF_{xx} + 2\mathrm{i}UF_x + \mathrm{i}\begin{pmatrix} |u|^2 + 4q_1 & u_x + u_y \\ -\bar{u}_x + \bar{u}_y & -|u|^2 - 4q_2 \end{pmatrix}, \tag{3.1.29}$$

$$-\mathrm{i}u_t = u_{xx} + u_{yy} + 2|u|^2u + 4(q_1 + q_2)u,$$

$$q_{1x} - q_{1y} = -\frac{1}{2}(|u|^2)_x,$$

$$q_{2x} + q_{2y} = -\frac{1}{2}(|u|^2)_x, \tag{3.1.30}$$

$$(FF^*)^{\mathrm{diag}} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}, \qquad [J, (FF^*)^{\mathrm{off}}] = U_x. \tag{3.1.31}$$

其中, $A^{\mathrm{diag}}, A^{\mathrm{off}}$ 分别表示矩阵 A 的对角和非对角部分. 如果将式 (3.1.29) 中的 F 看作式 (3.1.25) 中的 Ψ, 则式 (3.1.29) 就是 DSI 方程的 Lax 对, 而式 (3.1.25) 中的 ω_1, ω_2 与式 (3.1.29) 中的 u, q_1, q_2 有如下关系:

$$\omega_1 = |u|^2 + 4q_1, \qquad \omega_2 = -|u|^2 - 4q_2, \tag{3.1.32}$$

式 (3.1.30) 就是 DSI 方程 (3.1.24) 的非线性约束. 为了从 DSI 方程的解得到它的新解, 我们必须对式 (3.1.26) 作 Darboux 变换. 由于式 (3.1.26) 的可积条件式 (3.1.29), 式 (3.1.31), 式 (3.1.30) 比 DSI 方程和 Lax 对更多, 因而通过对式 (3.1.26) 作 Darboux 变换仅得到 DSI 的部分解. 我们考虑式 (3.1.26) 的系数矩阵 $2+s$ 阶中的 s 分别取 $s=1, s=2$ 构造新解.

(1) s=1

这时式 (3.1.26) 的系数矩阵为 3×3, 我们取

$$\lambda_1=\lambda_0\ \ (\mathrm{Im}\lambda_0\neq 0),\qquad \lambda_2=\lambda_3=\bar{\lambda}_0,$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix},\tag{3.1.33}$$

再取 Lax 组式 (3.1.26) 的解 $\{h_\alpha\}$, 使得当 $\lambda_\alpha\neq\lambda_\beta=0$ 时 $h_\alpha^* h_\beta=0$. 记 $H=(h_1,h_2,h_3)$, 而且

$$h_1=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix},\tag{3.1.34}$$

利用正交关系, 所得的 $S=H\Lambda H^{-1}$ 与 h_1,h_2 的选取无关, 用 S 的分量表出, 我们得到

$$s_{ij}=\bar{\lambda}_0\delta_{ij}+(\lambda_0-\bar{\lambda}_0)\frac{\xi_i\bar{\xi}_j}{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+|\xi_3|^2},\tag{3.1.35}$$

从而经过 Darboux 阵 $\lambda I-S$ 的作用, 得到

$$u'=u+2k\xi_1\bar{\xi}_2,$$

$$\begin{aligned}\omega_1'&=\omega_1-2k(u\bar{\xi}_1\xi_2+\bar{u}\xi_1\bar{\xi}_2)-2k(F_1\xi_1\bar{\xi}_2+\bar{F}_1\xi_1\bar{\xi}_2)-4k^2|\xi_1|^2(|\xi_2|^2+|\xi_3|^2),\\ \omega_2'&=\omega_2+2k(u\bar{\xi}_1\xi_2+\bar{u}\xi_1\bar{\xi}_2)+2k(F_2\bar{\xi}_2\xi_3+\bar{F}_2\xi_2\bar{\xi}_3)+4k^2|\xi_2|^2(|\xi|^2+|\xi_3|^2),\end{aligned}\tag{3.1.36}$$

其中

$$k=\frac{\mathrm{i}(\lambda_0-\bar{\lambda}_0)}{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+|\xi_3|^2},\tag{3.1.37}$$

而相应地有

$$F'=F+k\bar{\xi}_3\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix},\tag{3.1.38}$$

特别是, 当 $u=0,F=0,\omega_2=0$ 时, 可取

$$\xi_1=c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0(x+y)-2\mathrm{i}\lambda+0^2t},\qquad \xi_2=c_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0(x-y)+2\mathrm{i}\lambda_0^2t},\qquad \xi_3=c_3,\tag{3.1.39}$$

其中, c_1,c_2,c_3 是复常数, 这时我们得到线状非局域单孤子解

$$u'=\frac{-4\nu c_1\bar{c}_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\mu y-4\mathrm{i}(\mu^2-\nu^2)t}}{|c_1c_2|(2\cosh(2\nu y-8\mu\nu t+\ln|c_2|-\ln|c_1|))+|c_3|^2\mathrm{e}^{2\nu x}},\tag{3.1.40}$$

$$(\lambda_0=\mu+\mathrm{i}\nu,\quad \mu,\nu\neq 0).$$

利用 $v'=-|u'|^2+\frac{1}{2}(\omega_1'-\omega_2')$ 和式 (3.1.36)~ 式 (3.1.39) 我们可得到 v 的孤子解的显式表示. 注意到当 t 固定时, 式 (3.1.40) 沿直线 $y=ax+b(a\neq 0)$ 的两个方向渐近于零, 而在 $y=c$ 的两个方向上分别渐近于零和一个非零常数, 其中 c 是任意常数. 它的波峰沿 y 方向的运动速度为 $4\mathrm{Re}(\lambda_0)$. 因此它是非局域的.

(2) s=2

这时 Lax 对式 (3.1.26) 中的系数矩阵是 4×4 阶的, 我们取 $u=0, F=0, W-2=0$. 这时, 取

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0,\qquad \lambda_3=\lambda_4=\bar{\lambda}_0(\mathrm{Im}\lambda_0\neq 0),$$

作

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & \\ & \lambda_0 & & \\ & & \bar{\lambda}_0 & \\ & & & \bar{\lambda}_0\end{pmatrix},\tag{3.1.41}$$

$$H=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0(x+Jy)-2\mathrm{i}J\lambda^2t} & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\lambda}_0(x+Jy)-2\mathrm{i}J\bar{\lambda}_0^2}C^* \\ C & I\end{pmatrix},$$

其中, C 是 2×2 的常值矩阵. 利用式 (3.1.41) 可作出 Darboux 阵 $\lambda I-H\Lambda H^{-1}$, 从而经过计算可得到单孤子解的显式表示

$$u'=\frac{2bc_{12}}{|\mathrm{det}C|\cosh(2bx+\varphi_1)+c_1c_2\cosh(2b(y-4at)+\varphi_2)},\tag{3.1.42}$$

其中,

$$\begin{gathered}a=\mathrm{Re}\lambda_0,\quad b=\mathrm{Im}\lambda_0,\quad c_1=\sqrt{|C_{11}|^2+|C_{21}|^2}\\ c_2=\sqrt{|C_{12}|^2+|C_{22}|^2},\qquad c_{12}=\bar{C}_{11}C_{12}+\bar{C}_{21}C_{22},\\ \varphi_1=\mathrm{In}|\mathrm{det}C|,\qquad \varphi_2=\ln(c_1/c_2).\end{gathered}\tag{3.1.43}$$

式中, $\mathrm{det}C$ 表示 2×2 阶矩阵 C 行列式的值. 如果 $\mathrm{det}C\neq 0$, 此解是局域孤子解, 在无穷远处处趋于零. 如果我们进一步取

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_0^{(j)} & & & \\ & \lambda_0^{(j)} & & \\ & & \bar{\lambda}_0^{(j)} & \\ & & & \bar{\lambda}_0^{(j)}\end{pmatrix},\tag{3.1.44}$$

$$H=\begin{pmatrix} e^{i\lambda_0^{(j)}(x+Jy)-2iJ\lambda_0^{(j)2}t} & -e^{i\bar{\lambda}_0^{(j)}(x+Jy)-2iJ\bar{\lambda}_0^{(j)2}t}C^{(j)*} \\ C^{(j)} & I \end{pmatrix},$$

其中, $\lambda_0^{(j)}\neq\lambda_0^{(k)}(j\neq k),\lambda_0^{(j)}\neq\bar{\lambda}_0^{(k)}$, 可以作 m 阶 Darboux 阵进而得到多孤子解 (Zhou Z X　1996).

3.2　逆散射方法

逆散射方法是基于 Lax 对求可积系统孤子解的一种方法, 最初由 Zakharov 和 Shabat(1973, 1974) 于 1974 年给出, 利用这个方法去构造具有孤立波解的非线性方程, 同时通过一定的技巧得到孤子解, 在逆散射方法的大框架下有三种技巧, 其一是基于 Zakharov-Shabat 方法推进到 (1+2) 维 DS 方程 (Anker D 等　1978), 利用算子方程推导 DSII 方程, 基于所得到基本的线性方程组并由逆散射理论中的 Gelfand-Levitan 方程寻找 DSII 方程的孤子解; 其二是首先求 Lax 对中谱方程的本征值问题, 求初始散射量, 其次求散射资料随时间的发展, 最后从已知的散射资料作为时间的函数构造 DSII 的孤子解 (Arkadiev V A 等　1989); 其三是将 Zakharov-Shabat 方法推进到 (1+2) 维系统, 引入谱变换, 通过构造生成 Bäcklund 变换的规范变换并选取特殊的谱参数进而导出孤立子解 (Boiti M et al　1985, 1986, 1987, 1988, 1989, 1990).

本节我们考虑如下 DSII 方程:

$$2i\frac{\partial\zeta}{\partial\tau}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}=\frac{9}{2}\zeta|\zeta|^2+3\zeta\frac{\partial\Phi}{\partial\xi},\tag{3.2.1}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}=-3\frac{\partial|\zeta|^2}{\partial\xi},\tag{3.2.2}$$

这里波振幅由下式给出:

$$A=\epsilon h\zeta(\xi,\eta,\tau)e^{ik(x-c_pt)}+\text{c.c.},$$

其中, $\xi=k(x-c_Gt)\Delta,\eta=\delta\Delta,\tau=\delta^2\Delta^2k\sqrt{gh}t;c_p(\delta),c_G(\delta)$ 是波的相速度和群速度, $\delta=kh,\Delta=\epsilon/\delta^2$, 波在 xy 平面传播, t 是时间, h 是波的深度, c.c. 是复共轭.

令 $\zeta=A_0\zeta_1e^{ip\tau},Q=Q_0+Q_1,\dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi}=Q-3|\zeta|^2$, 这里 p,A_0,Q_0 都是常数, 选取 $A_0^2=\dfrac{2}{3}(Q_0+2p)$, 则式 (3.2.1)～ 式 (3.2.2) 变为

$$2i\frac{\partial\zeta_1}{\partial\tau}-\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial\eta^2}=-\frac{9}{2}A_0^2\zeta_1[|\zeta_1|^2-1]+3\zeta_1Q_1,\tag{3.2.3}$$

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \eta^2}=3A_0^2\frac{\partial^2|\zeta_1|^2}{\partial \eta^2}. \tag{3.2.4}$$

我们利用逆散射方法求式 (3.2.3)$\sim$ 式 (3.2.4) 的单孤波解和多孤波解.

下面, 我们用第一种方法求 DSII 方程的孤子解. 算子方程方法: 其主要思路是寻找两个算子 L_1^0, L_2^0, 作为获得矩阵函数 $K(x,z)$ 的偏微分方程组的基础, 从这两个基本算子推出包含未知函数的扩展算子 L_1, L_2 与 K 一起满足两个微分方程, 利用上述方程的相容性条件得到有孤立波解的非线性方程, 进而又得到基本的线性系统, 再经由 Gelfand-Levitan 方程最终得到非线性方程的孤子解. 具体步骤如下:

含有算子 L_1, L_2, L_1^0, L_2^0 和 K 的偏微分方程:

$$\begin{aligned}&\left(\alpha\frac{\partial}{\partial t}+L_1\right)\left\{\Psi(x,t,y)+\int_x^\infty K(x,z,t,y)\Psi(z,t,y)\mathrm{d}z\right\}\\&=\left\{1+\int_x^\infty K(x,z,t,y)\mathrm{d}z\right\}\times\left(\alpha\frac{\partial}{\partial t}+L_1^0\right)\Psi,\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

$$\begin{aligned}&\left(\beta\frac{\partial}{\partial y}+L_2\right)\left\{\Psi(x,t,y)+\int_x^\infty K(x,z,t,y)\Psi(z,t,y)\mathrm{d}z\right\}\\&=\left\{1+\int_x^\infty K(x,z,t,y)\mathrm{d}z\right\}\times\left(\alpha\frac{\partial}{\partial y}+L_2^0\right)\Psi,\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

由式 (3.2.5), 式 (3.2.6) 的相容性条件, 只要算子 $L_1, L_1^0, L_2, L_2^0, K$ 之间满足一定的关系, 就可以给出方程:

$$\left\{\alpha\frac{\partial L_2}{\partial t}-\beta\frac{\partial L_1}{\partial y}+[L_1,L_2]\right\}\left\{\Psi+\int_x^\infty K(x,z,t,y)\Psi(z,t,y)\mathrm{d}z\right\}=0, \tag{3.2.7}$$

其中, 交换子 $[L_1,L_2]=L_1L_2-L_2L_1$. 从式 (3.2.7), 我们得到算子方程

$$\alpha\frac{\partial L_2}{\partial t}-\beta\frac{\partial L_1}{\partial y}+[L_1,L_2]=0, \tag{3.2.8}$$

而式 (3.2.8) 就是孤立波方程. 以这种方法导出的孤立波方程保证了利用逆散射技巧它总是可解的, 而同时其下的线性问题由如下方程的解得到

$$[L_1^0,F]\Psi=0,\qquad [L_2^0,F]\Psi=0, \tag{3.2.9}$$

其中, F, K 满足 Gelfand-Levitan 方程

$$F(x,z)+K(x,z)+\int_x^\infty K(x,s)F(s,z)\mathrm{d}s=0; \tag{3.2.10}$$

式中, t, y 被省略, 通过寻找指数形解 F, 就得到了基本的孤立子解.

将上述技巧应用到 DSII 方程

$$L_1 = \begin{pmatrix} \partial^2/\partial x^2 & 0 \\ 0 & \partial^2/\partial x^2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \Sigma_{11x} & \Sigma_{12x} \\ \Sigma_{21x} & \Sigma_{22x} \end{pmatrix}, \tag{3.2.11}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} l_1\partial/\partial x & l_1 - l_2 \\ -(l_1 - l_2) & l_2\partial/\partial x \end{pmatrix} + (l_1 - l_2)\begin{pmatrix} 0 & \xi_{12} - 1 \\ -(\xi_{21} - 1) & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.12}$$

设当 $x \to \pm\infty, |\xi_{12}| \to 1, \xi_{21} = \xi_{12}^*$, 函数 Σ_{ij}, ξ_{ij} 的选取使得式 (3.2.8) 是 DSII 方程. 于是当 $x \to \pm\infty$ 时得到的线性算子是

$$L_1^0 = \begin{pmatrix} \partial^2/\partial x^2 & 0 \\ 0 & \partial^2/\partial x^2 \end{pmatrix}, \qquad L_2^0 = \begin{pmatrix} l_1\partial/\partial x & l_1 - l_2 \\ -(l_1 - l_2) & l_2\partial/\partial x \end{pmatrix}, \tag{3.2.13}$$

将上述算子代入式 (3.2.5), 式 (3.2.6) 并分部积分, 同时利用边界条件, 我们得到方程组

$$l_1\frac{\partial K_{11}}{\partial x} + \frac{\partial K_{11}}{\partial z} + \beta\frac{\partial K_{11}}{\partial y} + (l_1 - l_2)K_{21}\xi_{12} + (l_1 - l_2)K_{12} = 0,$$

$$l_1\frac{\partial K_{12}}{\partial x} + l_2\frac{\partial K_{12}}{\partial z} + \beta\frac{\partial K_{12}}{\partial y} + (l_1 - l_2)\xi_{12}K_{22} - (l_1 - l_2)K_{11} = 0, \tag{3.2.14}$$

用 2 代替 1 得到关于 K_{22}, K_{21} 的另外两个方程, 而在积分号下有

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial^2 K_{ij}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K_{ij}}{\partial z^2} + 2\Sigma_{ijx}K_{ij} = 0, \qquad i = 1, 2, j = 1, 2, \tag{3.2.15}$$

对于积出的部分给出

$$\Sigma(x) = K(x, x), \quad \xi_{12} - 1 = K_{12}(x, x), \quad \xi_{21} - 1 = K_{21}(x, x), \tag{3.2.16}$$

这些方程在 $z = x$ 上取值, 于是有

$$\alpha\frac{\partial\xi_{12}}{\partial t} + \frac{l_1 + l_2}{l_2 - l_1}\frac{\partial^2\xi_{12}}{\partial x^2} + \frac{2\beta}{l_2 - l_1}\frac{\partial^2\xi_{12}}{\partial x\partial y} + \frac{2(l_2^2 - l_1^2)}{l_1 l_2}\xi_{12}^2\xi_{21} + 2\xi_{12}\beta\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\Sigma_{22}}{l_2} - \frac{\Sigma_{11}}{l_1}\right] = 0, \tag{3.2.17}$$

$$l_1\frac{\partial\Sigma_{11}}{\partial x} + \beta\frac{\partial\Sigma_{11}}{\partial y} + (l_1 - l_2)[\xi_{12}\xi_{21} - 1] = 0, \tag{3.2.18}$$

关于 ξ_{21}, Σ_{22} 的方程可直接得到. 令 $l_1 = -\mathrm{i}\gamma, l_2 = \mathrm{i}\gamma$, 设 α, β, γ 是实数, 从式 (3.2.17), 式 (3.2.18) 得到两个方程:

$$\mathrm{i}\alpha\frac{\partial\xi_{12}}{\partial t} + \frac{\beta}{\gamma}\frac{\partial^2\xi_{12}}{\partial x\partial y} + 2\xi_{12}\frac{\beta}{\gamma}\frac{\partial}{\partial y}(\Sigma_{11} + \Sigma_{11}^*) = 0, \tag{3.2.19}$$

$$\mathrm{i}\gamma\frac{\partial\Sigma_{11}}{\partial x} - \beta\frac{\partial\Sigma_{11}}{\partial y} + 2\mathrm{i}\gamma\{|\xi_{12}|^2 - 1\} = 0, \tag{3.2.20}$$

由于 $\xi_{12}=\xi_{21}^*, \Sigma_{11}=\Sigma_{22}^*$, 记 $\Sigma_{11}=\varPhi+\mathrm{i}\varPsi$, 于是从式 (3.2.20) 得到

$$\gamma\frac{\partial\varPsi}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varPhi}{\partial y}=0$$

$$\gamma\frac{\partial\varPhi}{\partial x}-\beta\frac{\partial\varPsi}{\partial y}+2\gamma\{|\xi_{12}|^2-1\}=0. \tag{3.2.21}$$

因此, 置 $\varPsi=-\beta\dfrac{\partial\phi}{\partial y}, \varPhi=\gamma\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$, 我们得到

$$\gamma^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\beta^2\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+2\gamma\{|\xi_{12}|^2-1\}=0. \tag{3.2.22}$$

作代换 $X=x-\gamma y/\beta, Y=x+\gamma y/\beta$, 由式 (3.2.22) 得到

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2}+2[|\xi_{12}|^2-1]=0, \tag{3.2.23}$$

$$\mathrm{i}\alpha\frac{\partial\xi_{12}}{\partial t}-\frac{\partial^2\xi_{12}}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\xi_{12}}{\partial Y^2}-4\xi_{12}\gamma\Big(\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2}\Big)=0, \tag{3.2.24}$$

记

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}=\frac{2}{3A_0^2}Q_1-2|\zeta_1|^2+2,\qquad \xi_{12}=\zeta_1$$

这就给出

$$2\mathrm{i}\frac{\partial\zeta_1}{\partial t}-\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial Y^2}=-\frac{9}{2}A_0^2(|\zeta_1|^2-1)\zeta_1+3\zeta_1Q_1, \tag{3.2.25}$$

$$\frac{\partial^2Q_1}{\partial X^2}+\frac{\partial^2Q_1}{\partial Y^2}=3A_0^2\frac{\partial^2|\zeta_1|^2}{\partial Y^2}, \tag{3.2.26}$$

取 $X=\xi, Y=\eta, t=\tau, \alpha=2, \gamma=\dfrac{9}{16}A_0^2$, 这正是 DSII 方程 (3.2.3), (3.2.4). 基本的线性问题现在由如下方程给出:

$$L_1^0F=0,\qquad L_2^0F=0,$$

或者

$$\alpha\frac{\partial F_{ij}}{\partial t}+\frac{\partial^2F_{ij}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2F_{ij}}{\partial z^2}=0,\qquad i=1,j=2, \tag{3.2.27}$$

$$\beta\frac{\partial F_{11}}{\partial y}-\mathrm{i}\gamma\Big[\frac{\partial F_{11}}{\partial x}+\frac{\partial F_{11}}{\partial z}\Big]-2\mathrm{i}\gamma(F_{12}+F_{12}^*)=0, \tag{3.2.28}$$

$$\beta\frac{\partial F_{12}}{\partial y}-\mathrm{i}\gamma\Big[\frac{\partial F_{12}}{\partial x}-\frac{\partial F_{12}}{\partial z}\Big]-2\mathrm{i}\gamma(F_{11}^*-F_{11})=0, \tag{3.2.29}$$

再通过利用 Gelfand-Levitan 方程 (3.2.10) 就得到式 (3.2.27)~ 式 (3.2.29) 的指数形式的解, 即得到孤立子解以及指数形式的解和多孤子解. 下面我们寻求单孤子解.

(1) 单孤子解

让

$$F_{ij} = A_{ij}\mathrm{e}^{lx+my+nz}, \tag{3.2.30}$$

其中, $A_{ij}(t)$ 是复值函数而 l, m, n 是实数. 于是由式 (3.2.28), 式 (3.2.29) 有

$$[\beta m - \mathrm{i}\gamma(l+m)]A_{11} - 2\mathrm{i}\gamma(A_{12} + A_{12}^*) = 0, \tag{3.2.31}$$

$$[\beta m - \mathrm{i}\gamma(l-n)]A_{12} - 2\mathrm{i}\gamma(A_{11}^* - A_{11}) = 0, \tag{3.2.32}$$

取 $l = 2\sin\theta, n = 2\sin\phi, \beta m = 2\gamma(\cos\theta + \cos\phi)$, 则从式 (3.2.31), 式 (3.2.32) 得到

$$A_{11} = \mathrm{i}a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}(\theta+\phi)}, \qquad A_{12} = a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}(\theta-\phi)}, \tag{3.2.33}$$

其中 a 是实函数在下面确定. 方程 (3.2.10) 现在变为

$$\begin{cases} F_{11} + K_{11} + \displaystyle\int_x^\infty (K_{11}F_{11} + K_{12}F_{12}^*)\mathrm{d}s = 0, \\ F_{12} + K_{12} + \displaystyle\int_x^\infty (K_{11}F_{12} + K_{12}F_{11}^*)\mathrm{d}s = 0. \end{cases} \tag{3.2.34}$$

假如 $K_{11} = K_{11}^{'}\mathrm{e}^{lx+my+nz}, K_{12} = K_{12}^{'}\mathrm{e}^{lx+my+nz}$, 从式 (3.2.34) 得到

$$\begin{cases} A_{11} + K_{11}^{'} + \displaystyle\int_x^\infty [K_{11}^{'}A_{11}\mathrm{e}^{(l+n)s+my} + K_{12}^{'}A_{12}^*\mathrm{e}^{(l+n)s+my}]\mathrm{d}s = 0, \\ A_{12} + K_{12}^{'} + \displaystyle\int_x^\infty [K_{11}^{'}A_{12}\mathrm{e}^{(l+n)s+my} + K_{12}^{'}A_{11}^*\mathrm{e}^{(l+n)s+my}]\mathrm{d}s = 0. \end{cases} \tag{3.2.35}$$

积分式 (3.2.35) 得到

$$K_{11}^{'}\left[1 - \frac{A_{11}\mathrm{e}^{(l+n)x+my}}{l+n}\right] - \frac{K_{12}^{'}A_{12}^*\mathrm{e}^{(l+n)x+my}}{l+n} = -A_{11},$$

$$-K_{11}^{'}\frac{A_{12}\mathrm{e}^{(l+n)x+my}}{l+n} + K_{12}^{'}\left[1 - \frac{A_{11}^*\mathrm{e}^{(l+n)x+my}}{l+n}\right] = -A_{12}.$$

因此,

$$K_{12} = -\frac{A_{12}\mathrm{e}^{lx+my+nz}}{1 - 2\mathrm{e}^{(l+n)x+my}\mathrm{Re}A_{11}/(l+n)}, \tag{3.2.36}$$

$$\begin{aligned} \xi_{12} &= 1 - \frac{A_{12}\mathrm{e}^{(l+n)x+my}}{1 - 2\mathrm{e}^{(l+n)x+my}\mathrm{Re}A_{11}/(l+n)} \\ &= 1 - \frac{a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}(\theta-\phi)}\mathrm{e}^{(l+n)x+my}}{1 + \dfrac{1}{2}a\mathrm{e}^{(l+n)x+my}\sec\dfrac{1}{2}(\theta-\phi)} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\Psi}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\phi)}\}}{1 + \mathrm{e}^{-\Psi}}, \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

这里, $\Psi=-[(l+n)x+my+\delta],\delta=\ln\left[\frac{1}{2}a\sec\frac{1}{2}(\theta-\phi)\right]$. 接下来确定 a, 从式 (3.2.8) 得到

$$\alpha\frac{\partial A_{12}}{\partial t}+(l^2-n^2)A_{12}=0,$$

从而

$$A_{12}=A_{12}'\mathrm{e}^{-(l^2-n^2)t/\alpha},\tag{3.2.38}$$

因此, $a=a_0\mathrm{e}^{-(l^2-n^2)t/\alpha}$.

至此, 我们得到 DSII 方程的单孤子解

$$\xi_{12}=\frac{(\mathrm{e}^{\Psi}-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta^-})}{(1+\mathrm{e}^{\Psi})},\tag{3.2.39}$$

其中, $\xi_{12}=\zeta_1,X=\xi,Y=\eta,t=\tau$, 而

$$\Psi=2\sqrt{2}\cos\theta^-\{X\cos\theta^+-Y\sin\theta^+-\sqrt{2}t\sin\theta^-\cos2\theta^+\}-\delta_0,$$

$$\theta^-=\frac{1}{2}(\theta-\phi),\qquad\theta^+=\frac{1}{2}(\theta-\phi)+\frac{1}{4}\pi,$$

δ_0 是常数.

(2) 多孤子解

令

$$\begin{aligned}F_{11}&=\sum_{k=1}^{n}A_k\mathrm{e}^{l_kx+m_ky+n_kz}\\F_{12}&=\sum_{k=1}^{n}B_k\mathrm{e}^{l_kx+m_ky+n_kz}\end{aligned}\tag{3.2.40}$$

由式 (3.2.28), 式 (3.2.29)

$$\begin{aligned}&[\beta m_k-\mathrm{i}\gamma(l_k+n_k)]A_k-2\mathrm{i}\gamma(B_k+B_k^*)=0,\\&[\beta m_k-\mathrm{i}\gamma(l_k-n_k)]B_k-2\mathrm{i}\gamma(A_k^*-A_k)=0.\end{aligned}\tag{3.2.41}$$

置 $l_k=2\sin\theta_k,n_k=2\sin\phi_k,\beta m_k=2\gamma(\cos\theta_k+\cos\phi_k)$, 于是

$$A_k=\mathrm{i}a_k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}i(\theta_k+\phi_k)},\qquad B_k=a_k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}(\theta_k-\phi_k)},\tag{3.2.42}$$

a_k 是实的. Gelfand-Levitan 方程现在变为

$$\begin{aligned}&\Sigma_k\mathrm{e}^{l_kx+m_ky+n_kz}+H\\&+\int_x^{\infty}\{H(x,s)\Sigma_kA_k\mathrm{e}^{l_ks+m_ky+n_kz}+K(x,s)\Sigma_kB_k^*\mathrm{e}^{l_ks+m_ky+n_kz}\}\mathrm{d}s=0,\end{aligned}\tag{3.2.43}$$

$$\Sigma_k \mathrm{e}^{l_k x+m_k y+n_k z}+K$$
$$+\int_x^{\infty}\{H(x,s)\Sigma_k B_k \mathrm{e}^{l_k s+m_k y+n_k z}+K(x,s)\Sigma_k A_k^* \mathrm{e}^{l_k s+m_k y+n_k z}\}\mathrm{d}s=0, \tag{3.2.44}$$

记 $H=\Sigma_k H_k(x,y,t)\mathrm{e}^{n_k z}, K=\Sigma_k K_k(x,y,t)\mathrm{e}^{n_k z}$, 方程 (3.2.43), (3.2.44) 给出:

$$A_k \mathrm{e}^{l_k x+m_k y}+H_k-\Sigma_j \frac{H_j A_k+K_j B_k^*}{n_j+l_k}\mathrm{e}^{(l_k+n_j)x+m_k y}=0, \tag{3.2.45}$$

$$B_k \mathrm{e}^{l_k x+m_k y}+K_k-\Sigma_j \frac{H_j B_k+K_j A_k^*}{n_j+l_k}\mathrm{e}^{(l_k+n_j)x+m_k y}=0, \tag{3.2.46}$$

以矩阵形式写出

$$\begin{bmatrix} \left\{\delta_{ij}-\dfrac{A_i \mathrm{e}^{(l_i+n_j)x+m_i y}}{n_j+l_i}\right\} & \left\{-\dfrac{B_i^* \mathrm{e}^{(l_i+n_j)x+m_i y}}{n_j+l_i}\right\} \\ \left\{-\dfrac{B_i \mathrm{e}^{(l_i+n_j)x+m_i y}}{n_j+l_i}\right\} & \left\{\delta_{ij}-\dfrac{A_i^* \mathrm{e}^{(l_i+n_j)x+m_i y}}{n_j+l_i}\right\} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H \\ K \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} A\mathrm{e}^{lx+my} \\ B\mathrm{e}^{lx+my} \end{bmatrix}, \tag{3.2.47}$$

其中, $\{\cdot\}$ 表示 $n\times n$ 矩阵, $H, K, A\mathrm{e}^{lx+my}, B\mathrm{e}^{lx+my}$ 是 n 元向量. 由 Gramer 法则, 方程 (3.2.47) 的公式解是

$$\begin{bmatrix} H \\ K \end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}D, \tag{3.2.48}$$

其中, Δ 是式 (3.2.47) 左边矩阵的行列式, 而 D 是以 d_i 为元的向量, d_i 等于左边矩阵的第 i 列由方程 (3.2.47) 右边向量所代替而得到的矩阵的行列式. 为了寻找 ξ_{12}, 我们有

$$\xi_{12}=1+K_{12}(x,x)=1+\sum_{k=1}^{n}K_k(x,y,t)\mathrm{e}^{n_k x}=1+\frac{1}{\Delta}\sum_{p=n+1}^{2n}d_p \mathrm{e}^{n_p x}. \tag{3.2.49}$$

下面我们确定 A_k, B_k, 利用式 (3.2.27) 得到

$$\alpha\frac{\partial A_k}{\partial t}+(l_k^2-n_k^2)A_k=0,$$

$$\alpha\frac{\partial B_k}{\partial t}+(l_k^2-n_k^2)B_k=0,$$

从而

$$\begin{cases} A_k=\mathrm{i}a_{k0}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}(\theta_k+\phi_k)+2t(\cos 2\theta_k-\cos 2\phi_k)/\alpha}, \\ B_k=a_{k0}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}(\theta_k-\phi_k)+2t(\cos 2\theta_k-\cos 2\phi_k)/\alpha}. \end{cases} \tag{3.2.50}$$

有趣的是从式 (3.2.20) 我们可以计算 $|\xi_{12}|^2$ 的值.

从方程 (3.2.20) 我们得到

$$|\xi_{12}|^2 = 1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\beta}{2\mathrm{i}\gamma}\frac{\partial \Sigma_{11}}{\partial y}, \tag{3.2.51}$$

其中, $\Sigma_{11} = K_{11}(x, x)$. 现在

$$K_{11}(x, x) = \sum_{k=1}^{n} H_k(x, y, t)\mathrm{e}^{n_k x} = \sum_{p=1}^{n} \delta_p \mathrm{e}^{n_p x}/\varDelta, \tag{3.2.52}$$

其中, δ_p 是由行列式 $\varDelta$ 的前 n 列接连用式 (3.2.47) 右边向量代替后所得矩阵的行列式, 我们注意到这些列是由 $\varDelta$ 中相应列用 $\mathrm{e}^{n_p x}$ 相乘而得来的. 由于 $|\xi_{12}|^2 - 1$ 是实的, 我们也有

$$|\xi_{12}|^2 = 1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma_{11}^*}{\partial x} - \frac{\beta}{2\mathrm{i}\gamma}\frac{\partial \Sigma_{11}^*}{\partial y}, \tag{3.2.53}$$

故

$$|\xi_{12}|^2 = 1 - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}(\Sigma_{11}^* + \Sigma_{11}) - \frac{\beta \mathrm{i}}{4\gamma}\frac{\partial}{\partial y}(\Sigma_{11} - \Sigma_{11}^*), \tag{3.2.54}$$

现在

$$\frac{1}{\varDelta}\frac{\partial \varDelta}{\partial x} = \sum_{p=1}^{n}\frac{\delta_p e^{n_p x}}{\varDelta} + \sum_{p=1}^{n}\frac{\delta_p^* e^{n_p x}}{\varDelta},$$

其中, δ_p^* 是由 $\varDelta$ 中后 n 列接连分别用式 (3.2.47) 右边的复共轭向量代替所得矩阵的行列式. 因此, 如同 Zakharov-Shabat 在论文中 (Zakharov V E 等 1974) 所得, 有

$$\partial(\Sigma_{11}^* + \Sigma_{11})/\partial x = \partial^2 \ln\varDelta/\partial x^2.$$

从而

$$|\xi_{12}|^2 = 1 - \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\ln\varDelta. \tag{3.2.55}$$

第二种方法 (Arkadiev V A 等 1989): Arkadiev, Pogrebkov 和 Polivanov 利用复变函数知识将求解谱方程的本征值问题转化为积分方程, 获得散射资料, 求散射资料的时间发展, 利用离散谱构造孤子解.

第一步: 从谱方程出发, 求特征函数, 获得散射资料.

利用复变函数知识, 改写 DSII 方程. 我们考虑

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t q + \partial_x^2 q - \partial_y^2 q + 2k|q|^2 q + qv = 0, \\ \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = -4k\partial_x^2(|q|^2), \qquad k = \pm 1. \end{cases} \tag{3.2.56}$$

记 $z = x + \mathrm{i}y, \partial = \frac{1}{2}(\partial_x - \mathrm{i}\partial_y)$, 则式 (3.2.56) 可以改写为

$$\begin{cases} \mathrm{i}q_t + 2(\partial^2 + \partial^{*2})q + (g + g^*)q = 0, \\ \partial^* g = -k\partial|q|^2, \end{cases} \tag{3.2.57}$$

其中, 我们引进的函数 g 满足 $\partial_x g = \frac{1}{2}(\partial_y + \mathrm{i}\partial_x)v + k\partial_x|q|^2$. 利用 Cauchy-Green 公式, 对于衰减的 q, 解式 (3.2.57) 的第二个方程得到

$$g(z) = k\int \frac{\mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\zeta^*}{2\pi\mathrm{i}} \frac{|q(\zeta)|^2}{(\zeta - z)^2}, \tag{3.2.58}$$

其中, $\mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\zeta^* = 2\mathrm{i}\mathrm{d}\zeta_R \mathrm{d}\zeta_I$, DSII 方程可作为如下 Lax 对的相容性条件:

$$\begin{cases} \partial^* \Phi_1 = \dfrac{q(z)}{2}\Phi_2, \\ \partial \Phi_2 = k\dfrac{q(z)^*}{2}\Phi_1, \end{cases} \tag{3.2.59}$$

$$\begin{cases} \partial_t \Phi_1 = 2\mathrm{i}\partial^2 \Phi_1 + \mathrm{i}\Phi_2 \partial^* q - \mathrm{i}q\partial^* \Phi_2 + \mathrm{i}g\Phi_1, \\ \partial_t \Phi_2 = -2\mathrm{i}\partial^{*2}\Phi_2 - \mathrm{i}k\Phi_1 \partial q^* + \mathrm{i}kq^* \partial \Phi_1 - \mathrm{i}g^* \Phi_2. \end{cases} \tag{3.2.60}$$

下面, 我们引进矩阵符号

$$\begin{cases} q^-(z) = \sigma \mathrm{diag}\left(\dfrac{q^*(z)}{4\pi}, \dfrac{q(z)}{4\pi}\right), \\ E_k(z) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{kz}, \mathrm{e}^{k^* z^*}), \\ Q_k(z,\zeta) = E_k(z-\zeta)\mathrm{diag}((z-\zeta)^{-1}, (z^* - \zeta^*)^{-1})q^-(\zeta), \end{cases} \tag{3.2.61}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

这里 k 是任一复参数. 令 $\Phi_k(z)$ 是式 (3.2.59) 满足如下渐近条件的解:

$$\Phi_k(z)E_{-k}(z) \to I, \qquad |z| \to \infty, \tag{3.2.62}$$

其中, I 是单位矩阵, 利用 Cauchy-Green 公式将式 (3.2.59) 写为积分方程组

$$\Phi_k(z) - \langle Q_k \Phi_k \rangle(z) = E_k(z), \tag{3.2.63}$$

对于任意矩阵 $F(z,\zeta), G(z,\zeta), H(z,\zeta)$ 我们定义:

$$\begin{cases} \langle FG\rangle(z,\zeta) = -\mathrm{i}\displaystyle\int \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}s^* F(z,s)G(s,\zeta), \\ \langle FGH\rangle(z,\zeta) = (-\mathrm{i})^2 \displaystyle\int \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}s^* \int \mathrm{d}l \wedge \mathrm{d}l^* F(z,l)G(ls)H(s,\zeta), \\ \langle FG\rangle = -\mathrm{i}\displaystyle\int \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}s^*, \\ \langle FH\rangle(z) = -\mathrm{i}\displaystyle\int \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}s^* F(s)H(s,z). \end{cases} \tag{3.2.64}$$

我们还需要式 (3.2.63) 的共轭积分方程

$$\Psi_k(z) - \langle \Psi_k Q_k \rangle(z) = q^-(z)E^*_{-k}(z), \tag{3.2.65}$$

利用式 (3.2.63) 我们得到

$$\langle q^- E^*_{-k}\Phi_k\rangle = \langle \Psi_k E_k\rangle \equiv T(k). \tag{3.2.66}$$

$T(k)$ 就是逆散射方法中起中心作用的散射阵. 利用上述符号, 容易得到

$$q^{*-} = \sigma q^- \sigma^{-1}, \quad E_k(z)^* = \sigma E_k(z)\sigma^{-1}, \quad Q_k(z,\zeta)^* = \sigma Q(z,\zeta)\sigma^{-1}, \tag{3.2.67}$$

于是由式 (3.2.63), 式 (3.2.65) 对于解 Φ_k, Ψ_k 和 T 矩阵也有

$$\Phi^*_k(z) = \sigma\Phi_k(z)\sigma^{-1}, \quad \Psi_k(z)^* = \sigma\Psi_k(z)\sigma^{-1}, \quad T(k)^* = \sigma T(k)\sigma^{-1}, \tag{3.2.68}$$

从而可以将 $T(k)$ 写为

$$T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ kb(k)^* & a(k)^* \end{pmatrix}. \tag{3.2.69}$$

注意到式 (3.2.63) 和式 (3.2.65) 的离散谱对应于孤子解, 因此我们必须研究 Φ_k, Ψ_k 在 $k = \lambda_j, j = 1, 2, \cdots, N$ 极点处的性态, 在极点处同时有 $(k-\lambda_j)^{-1}, (k-\lambda_j)^{-1*}$ 类两种奇性, 于是我们记

$$\begin{cases} \Phi_k(z) = \dfrac{A(z)}{k-\lambda} + \sigma\Big(\dfrac{A(z)}{k-\lambda}\Big)^*\sigma^{-1} + O(1), \\ \Psi_k(z) = \dfrac{B(z)}{k-\lambda} + \sigma\Big(\dfrac{B(z)}{k-\lambda}\Big)^*\sigma^{-1} + O(1), \end{cases} \tag{3.2.70}$$

其中, $O(1)$ 包含当 $k \to \lambda$ 时有确定极限的项和 $(k-\lambda)/(k-\lambda)^*, (k-\lambda)^*/(k-\lambda)$ 类项, 利用共轭性式 (3.2.64) A, B 显然是对应于式 (3.2.59) 和式 (3.2.61) 的齐次方程的解. 将式 (3.2.70) 代入式 (3.2.59) 和式 (3.2.61), 同时将 Q_k 按 $(k-\lambda), (k-\lambda)^*$ 的幂次展开, 对于式 (3.2.70) 的展开式系数我们得到具有特殊非齐次项的式 (3.2.59) 和式 (3.2.61) 形式的积分方程, 再应用 Fredholm 择一性, 即非齐次项与共轭方程的齐次解的正交性质, 经过计算得到

$$\begin{cases} \Phi_k(z) = -\dfrac{A\otimes e}{k-\lambda} - \sigma\Big(\dfrac{A\otimes e}{k-\lambda}\Big)^*\sigma^{-1} + O(1), \\ \Psi_k(z) = -\dfrac{e'\otimes B}{k-\lambda} - \sigma\Big(\dfrac{e'\otimes B}{k-\lambda}\Big)^*\sigma^{-1} + O(1). \end{cases} \tag{3.2.71}$$

其中, $e = (1, 0)$ 是固定行向量; e' 是其转置; $A(z), B(z)$ 分别是如下齐次积分方程的并由条件

$$\langle q^- E^*_{-\lambda}A\rangle = e', \qquad \langle BE_\lambda\rangle = e$$

进行标准化的解的列和行

$$A(z)-\langle Q_\lambda A\rangle(z)=0,\qquad B(z)-\langle BQ_\lambda\rangle(z)=0. \tag{3.2.72}$$

显然, $\sigma A^*, B^*\sigma$ 分别是方程 (3.2.72) 第一个方程和第二个方程的由共轭条件 (3.2.67) 为如下条件

$$\langle q^- E^*_{-\lambda}\sigma A^*\rangle=\sigma e',\qquad \langle B\sigma E_\lambda\rangle=e\sigma$$

所标准化的另一个解. 式 (3.2.71) 表明齐次方程的解 Φ_k 的第一列 $\Phi_k^1(z)$ 和第二列 $\Phi_k^2(z)$ 分别用 $(k-\lambda),(k-\lambda)^*$ 相乘后在 $k=\lambda$ 的邻域是 k 和 k^* 的光滑函数, 对共轭齐次方程的解 $\Psi_k(z)$ 的第一行和第二行 $\Psi_k^1(z),\Psi_k^2(z)$ 也有同样结果. 于是 $\partial(k-\lambda)\Phi_k^1(z)/\partial k$ 当 $k=\lambda$ 时是式 (3.2.72) 第一个方程 (即式 (3.2.63) 的齐次积分方程) 的一列解, 由式 (3.2.72), 两个解的线性组合仍是解, 从而

$$\frac{\partial}{\partial k}(k-\lambda)\Phi_k^1(z)|_{k=\lambda}=\mu A(z)+\nu\sigma A(z)^*, \tag{3.2.73}$$

其中, μ,ν 是引进的新参数. 我们需要阐述 $\Phi_k^1(z)$ 是违背解析性的. 即需要考虑式 (3.2.63) 对 k^* 求导, 由式 (3.2.61), 式 (3.2.66), 式 (3.2.69) 我们得到

$$\frac{\partial}{\partial k^*}\left[\Phi_k^1(z)\mathrm{e}^{-kz}+\sum_{j=1}^{N}\frac{A_j(z)}{k-\lambda_j}\mathrm{e}^{-\lambda_j z}\right]=(b(k)\sigma\Phi_k^1(z))^*\mathrm{e}^{-kz}, \tag{3.2.74}$$

其中, N 是谱方程 (3.2.59) 算子离散谱的个数. 式 (3.2.74) 与式 (3.2.73) 的不同之处在于: 一方面它包含了在所有极点处的性态, 另一方面引入了指数函数因子从而保证了当 $k,z\to\infty$ 解的有界性. 因此我们又可利用 Cauchy-Green 公式于式 (3.2.74) 有积分方程

$$\Phi_k^1(z)=E_k^1(z)-\sum_{j=1}^{N}\frac{A_j(z)}{k-\lambda_j}\mathrm{e}^{(k-\lambda_j)z}+\int\frac{\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}p^*}{2\mathrm{i}\pi}\frac{b(p)^*}{k-p}\mathrm{e}^{(k-p)z}\sigma\Phi_p^{1*}(z), \tag{3.2.75}$$

其中

$$E_k^1(z)=\mathrm{e}^{kz}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

是 $E_k(z)$ 的第一列. 由式 (3.2.73), 式 (3.2.75) 我们有

$$\begin{aligned}&E_{\lambda_n}^1(z)-\sum_{j=1}^{N}\frac{A_j(z)}{\lambda_n-\lambda_j}\mathrm{e}^{(\lambda_n-\lambda_j)z}+\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|p|>\epsilon}\frac{\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}p^*}{2\mathrm{i}\pi}\frac{b(p)^*}{\lambda_n-p}\mathrm{e}^{(\lambda_n-p)z}\sigma\Phi_p^{1*}(z)\\&=(z+\mu_n)A_n(z)+\nu_n\sigma A_n(z)^*,\qquad n=1,2,\cdots,N,\end{aligned} \tag{3.2.76}$$

我们证明上式有意义. 由式 (3.2.71), $\Phi_p^{1*}(z) = -(p-\lambda_n)^{-1*}A^*(z)$, 现在考虑式 (3.2.74) 两边在 $k=\lambda_n$ 邻域的性态, 我们有

$$b^*(p) \cong \frac{(p-\lambda_n)^*}{p-\lambda_n} b^{\sim *}(p),$$

其中, $b^{\sim}(p)$ 是此邻域中有确切定义的函数, 从而式 (3.2.76) 中被积函数的性态如同 $(p-\lambda_n)^{-2}$ 乘以 p 的一个光滑函数.

方程 (3.2.75)、(3.2.76) 正是逆问题方程的完整系统, 于是散射资料现在为

$$\Pi = \{b(k), \lambda_j, \mu_j, \nu_j, j=1,2,\cdots,N\}, \tag{3.2.77}$$

由给定的这些资料我们设解 Φ_k^1 存在并唯一. 为重构 $q(z), g(z)$, 我们必须考虑在矩阵 Φ_k 中当 $k\to\infty$ 时 k^{-1} 阶项, 由式 (3.2.61), 式 (3.2.63) 和式 (3,2,72) 我们有

$$\lim_{k\to\infty} k(\Phi_k(z))_{21}\mathrm{e}^{-kz} = \frac{k}{2}q^*(z),$$

于是由式 (3.2.75)

$$\frac{k}{2}q(z) = k\int \frac{\mathrm{d}p\wedge \mathrm{d}p^*}{2\mathrm{i}\pi} b(p)^*(\Phi_p(z))_{11}^*\mathrm{e}^{(-pz)^*} - \sum_{j=1}^{N}((A_j(z))_2\mathrm{e}^{-\lambda_j z})^*, \tag{3.2.78}$$

其中, $(\Phi_k(z))_{ij}, (A_j(z))_i$ 分别是矩阵 $\Phi_k(z)$ 和列 $A_j(z)$ 的元. 类似有

$$\begin{aligned} g(z) &= -4\lim_{k\to\infty} \partial k(\Phi_k(z))_{11}\mathrm{e}^{-kz} \\ &= -4\partial\Big[\int \frac{\mathrm{d}p\wedge \mathrm{d}p^*}{2\mathrm{i}\pi} b(p)^*(\Phi_p(z))_{21}^*\mathrm{e}^{-pz} - \sum_{j=1}^{N}(A_j(z))_1\mathrm{e}^{-\lambda_j z}\Big], \end{aligned} \tag{3.2.79}$$

在完成第一步的最后, 根据散射资料我们将式 (3.2.75) 代入式 (3.2.66), 式 (3.2.69) 并利用标准化条件得到如下的色散关系即 $a(k)$ 的显式

$$a(k) = k\int \frac{\mathrm{d}p\wedge \mathrm{d}p^*}{2\mathrm{i}\pi}\frac{|b(p)|^2}{k-p} - \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{k-\lambda_j}. \tag{3.2.80}$$

第二步: 求散射资料随时间的发展. 对于方程 (3.2.63) 的并由式 (3.2.62) 规范的解, 对于任何 t, 方程 (3.2.60) 为

$$\partial_t\Phi_k(z) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i}(\partial^2-k^2)+\mathrm{i}g & \mathrm{i}(\partial^* q) - \mathrm{i}q\partial^* \\ (k\mathrm{i}(\partial^* q) - \mathrm{i}kq\partial^*)^* & 2\mathrm{i}(\partial^2-k^2)+\mathrm{i}g \end{pmatrix}\Phi_k(z). \tag{3.2.81}$$

由定义式 (3.2.66), 式 (3.2.69), 我们有

$$a(k,t)=a(k)=c,\qquad b(k,t)=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t(k^2+k^{*2})}b(k). \tag{3.2.82}$$

由式 (3.2.80), 式 (3.2.82)

$$\lambda_j=c,\quad \mu_j(t)=\mu_j+4\mathrm{i}\lambda_j t,\quad \nu_j(t)=\nu_j\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t(\lambda_j^2+\lambda_j^{2*})},\quad j=1,2,\cdots,N, \tag{3.2.83}$$

第三步：求出孤立子解. 离散谱产生孤立子解, 故 $b(k)=0$. 引入矩阵 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 和列向量 $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}_{jj}=z+\mu_j(t),\quad \mathcal{M}_{ij}=(\lambda_i-\lambda_j)^{-1}\mathrm{e}^{(\lambda_i-\lambda_j)z},\quad i\neq j;\\ &\mathcal{E}_j=\mathrm{e}^{\lambda_j z},\qquad \mathcal{N}=\mathrm{diag}\{\nu_j(t)\}_{j=1}^N,\qquad i,j=1,\cdots,N,\end{aligned} \tag{3.2.84}$$

记 $\mathcal{A}_i(z),i=1,2$, 是以 $\mathcal{A}_{ij}(z)=(A_j(z))_i,j=1,\cdots,N$ 为分量的向量. 由式 (3.2.75), 在纯孤子情形 $\varPhi_k(z)$ 可显式地由 $\mathcal{A}_i(z)$ 表示. 由式 (3.2.76), 利用式 (3.2.84), $\mathcal{A}_i$ 现在简化为一代数方程组

$$\begin{pmatrix}\mathcal{M} & \mathcal{N}\\ k\mathcal{N}^* & \mathcal{M}^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{A}_1\\ \mathcal{A}_2^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathcal{E}\\ 0\end{pmatrix}. \tag{3.2.85}$$

式 (3.2.78), 式 (3.2.79) 推出

$$q(z)=-2k\sum_{j=1}^N\mathcal{A}_{2j}^*(z)\mathrm{e}^{-(\lambda_j z)^*},\quad g(z)=4\partial\sum_{j=1}^N\mathcal{A}_{1j}(z)\mathrm{e}^{-\lambda_j z}, \tag{3.2.86}$$

于是有

$$\begin{aligned}|q(z)|^2&=-2k\sum_{j=1}^N q^*(z)\mathcal{A}_{2j}^*(z)\mathrm{e}^{-(\lambda_j z)^*}=-4k\sum_{j=1}^N\mathrm{e}^{-(\lambda_j z)^*}\partial\mathcal{A}_{1j}^*(z)\\ &=-4k\partial^*\sum_{j=1}^N\mathrm{e}^{-\lambda_j z}\mathcal{A}_{1j}(z).\end{aligned} \tag{3.2.87}$$

式 (3.2.87) 的第一个结果出于式 (3.2.86) 的第一式, 第二个结果来自于对于 $\mathcal{A}_i(z)$ 的微分方程 (3.2.59) 而最后一个是 $|q(z)|^2$ 为实数的直接结果.

我们容易从式 (3.2.85) 得到解 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2$

$$\sum_{j=1}^N\mathrm{e}^{-\lambda_j z}\mathcal{A}_{1j}(z)=\partial\log\mathcal{D},$$

其中

$$\mathcal{D}=\det\begin{pmatrix}\mathcal{M} & \mathcal{N}\\ k\mathcal{N}^* & \mathcal{M}^*\end{pmatrix}. \tag{3.2.88}$$

综合上述结果最终得到 N- 孤子解:

$$|q(z)|^2=-4k\partial\partial^*\log\mathcal{D},\qquad g(z)=4\partial^2\log\mathcal{D}. \tag{3.2.89}$$

特别地, 方程的单孤子解

$$q=\frac{2\nu^*}{\mathcal{D}}\mathrm{e}^{[\lambda z-\lambda^* z^*+2\mathrm{i}(\lambda^2+\lambda^{*2})t]},\qquad g(z)=4\partial^2\log\mathcal{D}. \tag{3.2.90}$$

其中, $\mathcal{D}=|z+4\mathrm{i}\lambda t+\mu|^2-k|\nu|^2$. 值得注意的是当 $k=\mathrm{i}$ 和 $k=-1$ 时孤立子的性态有很大不同, 当 $k=-1$ 时, 孤子解是光滑的, 而当 $k=1$ 时, 由于 $\mathcal{D}$ 在 z 平面有零点, 因此所有孤子解都有奇性.

注 从式 (3.2.89) 和 $\mathcal{D}$ 的定义可见, 我们这里得到的孤子解在所有方向都以 $|z|^{-2}$ 速度衰减.

第三种方法: 谱变换方法.

我们考虑 DS 方程

$$\mathrm{i}Q_t=-\frac{1}{2}\sigma_3(Q_{xx}+\alpha^2Q_{yy})+\sigma_3Q^3+[Q,A],(\partial_x+\alpha\sigma_3\partial_y)A=\alpha(Q^2)_y, \tag{3.2.91}$$

其中, $\alpha=1$ 是 DSI 方程, 而 $\alpha=\mathrm{i}$ 是 DSII 方程.

谱变换方法大体分为六步. 以 DSI 方程为例 $(\alpha=1)$:

1) 在平面上考虑双曲形式 2×2 Zakharov-Shabat 谱问题

$$(\partial_x+\sigma_3\partial_y+Q)\varPsi=0,\quad Q=\begin{pmatrix}0 & q(x,y)\\ r(x,y) & 0\end{pmatrix}. \tag{3.2.92}$$

2) 通过寻找满足如下条件的特征函数 $\varPsi(x,y,k)$ 引入复谱参数 k

$$\varPsi(x,y,k)\exp[-\mathrm{i}k(\sigma_3x-y)]\xrightarrow[k\to\infty]{}I, \tag{3.2.93}$$

3) 作为 $\varPsi(x,y,k)$ 解析性的偏离度量定义 $Q(x,y)$ 的 2×2 矩阵谱变换 $R(k,l)$ 如下:

$$\frac{\partial\varPsi(x,y,k)}{\partial\bar{k}}=\iint \mathrm{d}l\wedge\mathrm{d}\bar{l}\,\varPsi(x,y,l)R(k,l), \tag{3.2.94}$$

其中, $\bar{\ }$ 表示复共轭, R 一般是非对角阵.

4) 通过引入含有 ω 的 2×2 矩阵色散关系 $\Omega(k,t)$ 和需求的谱变换 $R(k,l,t)$ 的发展

$$R_t(k,l,t)=R(k,l,t)\Omega(k,t)-\Omega(l,t)R(k,l,t) \tag{3.2.95}$$

来确定 Q 的时间发展. 这里, 我们可选取

$$\Omega=\omega(k)\sigma_3,\qquad \omega(\bar{k})=-\omega(\bar{k}), \tag{3.2.96}$$

其中, $\omega(k)$ 是 k 的多项式.

5) 构造生成 Q 的 Bäcklund 变换 $Q^{'}$ 的最简单的规范变换 $B(Q^{'},Q)$

$$B(Q^{'},Q)=\alpha\partial_y-\frac{1}{2}\sigma_3(Q^{'}\alpha-\alpha Q)-\frac{1}{2}\sigma_3\alpha\bar{\partial}(Q^{'2}-Q^2)+\beta, \tag{3.2.97}$$

其中,

$$\bar{\partial}=(\partial_x+\sigma_3\partial_y)^{-1}, \tag{3.2.98}$$

带有如下边界需求：在给定方向对角阵 $M=M(x,y),\lim\bar{\partial}M=0$, 而 α,β 是 2×2 常数对角阵. 我们致力于从零解出发通过初等 Bäcklund 规范变换的复合去构造单孤子解, 为此我们构造具有可换性的 Bäcklund 规范变换

$$\begin{aligned}B(Q,0,\lambda,\mu)&=B^{(\mathrm{II})}(Q,Q^{(\mathrm{I})};\mu)B^{(\mathrm{I})}(Q^{(\mathrm{I})},0,\lambda)\\&=B^{(\mathrm{I})}(Q,Q^{(\mathrm{II})}\lambda)B^{(\mathrm{II})}(Q^{(\mathrm{II})},0,\mu),\end{aligned} \tag{3.2.99}$$

取

$$Q^{(\mathrm{I})}=\begin{pmatrix}0&0\\r^{(\mathrm{I})}&0\end{pmatrix},\quad Q^{(\mathrm{II})}=\begin{pmatrix}0&q^{(\mathrm{II})}\\0&0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}0&q\\r&0\end{pmatrix}, \tag{3.2.100}$$

其中, $B^{(\mathrm{I})}(Q^{'},Q,\lambda),B^{(\mathrm{II})}(Q^{'},Q,\mu)$ 分别在式 (3.2.97) 中取

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad\beta=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&1\end{pmatrix}$$

和

$$\alpha=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad\beta=\begin{pmatrix}1&0\\0&\mu\end{pmatrix}$$

而得到.

$$r^{(I)}=\rho(x+y,t)\mathrm{e}^{-\lambda(x-y)},\qquad q^{(II)}=\eta(x-y,t)\mathrm{e}^{\mu(x+y)}, \tag{3.2.101}$$

$$q=\frac{q_y^{(\mathrm{II})}+(\lambda-\mu)q^{(\mathrm{II})}}{1+\dfrac{1}{4}r^{(I)}q^{(\mathrm{II})}},\qquad r=\frac{r_y^{(\mathrm{I})}-(\lambda-\mu)r^{(\mathrm{I})}}{1+\dfrac{1}{4}r^{(\mathrm{I})}q^{(\mathrm{II})}}, \tag{3.2.102}$$

而

$$\begin{aligned}\rho(x+y,t)&=\iint\mathrm{d}l\wedge\mathrm{d}\bar{l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l(x+y)}\tilde{\rho}(l,t),\\\eta(x-y,t)&=\iint\mathrm{d}l\wedge\mathrm{d}\bar{l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l(x-y)}\tilde{\eta}(l,t),\end{aligned} \tag{3.2.103}$$

又

$$\tilde{\rho}(l,t) = \tilde{\rho}(l,0)\exp\left[\omega(l)t + \omega(-\mathrm{i}\lambda)t\right],$$

$$\tilde{\eta}(l,t) = \tilde{\eta}(l,0)\exp\left[-\omega(l)t - \omega(-\mathrm{i}\mu)t\right], \tag{3.2.104}$$

$\tilde{\rho}(l,0), \tilde{\eta}(l,0)$ 是任意函数, 利用式 (3.2.97)~ 式 (3.2.104), 我们得到显式 $B(Q,0,\lambda,\mu)$ 如下:

$$B(Q,0,\lambda,\mu) = I\partial_y + B^{(I)}(Q,0,\lambda,\mu),$$

$$B^{(I)}(Q,0,\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} \lambda - \dfrac{1}{2}r^{(I)}q & -\dfrac{1}{2}q \\ \dfrac{1}{2}r & \mu - \dfrac{1}{4}q^{(II)}r \end{pmatrix}. \tag{3.2.105}$$

应用 Bäcklund 规范算子 $B(Q,0,\lambda,\mu)$ 于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\sigma_3 x - y)}$ 得到式 (3.2.100) 中 Q 的特征函数

$$\Psi(x,y,k) = \left\{ I - \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} r_1 q/(k+\mathrm{i}\lambda) & 2q/(k+\mathrm{i}\mu) \\ -2r/(k+\mathrm{i}\lambda) & q_2 r/(k+\mathrm{i}\mu) \end{pmatrix} \right\} \exp[\mathrm{i}k(\sigma_3 x - y)], \tag{3.2.106}$$

由式 (3.2.94) 经计算得到 Q 的谱变换为

$$R(k,l) = \mathrm{i}\pi \begin{pmatrix} 0 & \delta(k+\mathrm{i}\mu)\tilde{\eta}(l,t)(l+\mathrm{i}\lambda) \\ -\delta(k+\mathrm{i}\lambda)\tilde{\rho}(l,t)(l+\mathrm{i}\mu) & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.107}$$

6) 取特殊的 $\omega(k), \tilde{\rho}(l,0), \tilde{\eta}(l,0)$, 最终得到局部孤立子解. 取

$$\tilde{\rho}(l,0) = \rho[\delta(l-\mathrm{i}\mu) + \delta(l+\mathrm{i}\mu)],$$

$$\tilde{\eta}(l,0) = \eta[\delta(l-\mathrm{i}\lambda) + \delta(l+\mathrm{i}\lambda)], \tag{3.2.108}$$

其中, η, ρ 是任意实常数. 注意到这时 $R(k,l), \Psi(l)$ 都是 l 的广义函数, 因此必须考虑到在式 (3.2.94) 中仅仅它们的积是有明确定义的. 又注意特征函数式 (3.2.106) 并未描述谱问题式 (3.2.92) 的边界状态, 我们可以检验 Ψ 在 $k=-\mathrm{i}\lambda$ 或在 $k=-\mathrm{i}\mu$ 点的留数都不在 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 中 (在 $x=\pm y$ 方向它们渐近于非零常数). 为了从一般解 Q 得到孤立子解, 我们取 $\omega(k) = \mathrm{i}k^2$ 和

$$r = \epsilon\bar{q}, \qquad \epsilon \in \mathbf{R}, \tag{3.2.109}$$

于是得到孤立子解:

$$q = (\lambda\eta/\Delta)\mathrm{e}^{\alpha t}, \quad r = (\mu\rho/\Delta)\mathrm{e}^{-\alpha t}, \tag{3.2.110}$$

$$\Delta = \gamma\cosh\xi_1 + \sqrt{\gamma(1+\gamma)}\cosh(\xi_2+\delta), \tag{3.2.111}$$

$$\alpha = \mathrm{i}(\mu^2+\lambda^2), \tag{3.2.112}$$

$$\gamma = \frac{1}{4}\eta\rho, \quad \delta = \frac{1}{2}\ln[(1+\gamma)/\gamma], \tag{3.2.113}$$

$$\xi_1 = (\lambda+\mu)x - (\lambda-\mu)y,$$

$$\xi_2 = (\lambda-\mu)x - (\lambda+\mu)y, \tag{3.2.114}$$

对于 $\lambda\mu \neq 0, \gamma(1+\gamma) > 0$ 上式定义了 (直到分子中的相因子 $\exp[\pm \mathrm{i}\phi]$) 一个二维钟型解, 它在 (x, y) 平面的所有方向衰减而且位移不变形. 注意到上式是静态解, 利用 DS 方程的伽利略不变性得到移动的孤立子如下：

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q(x,y,t) \\ (\mu\rho/\lambda\eta)\bar{q} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.115}$$

$$q(x,y,t) = \frac{2\lambda\eta}{D}\exp\left[\mathrm{i}\left(v_1 x + v_2 y - \frac{1}{2}(v_1^2+v_2^2)t + (\lambda^2+\mu^2)t\right)\right],$$

$$\begin{aligned} D(x,y,t) =& \gamma\cosh[(\lambda+\mu)(x-v_1t) - (\lambda-\mu)(y-v_2t)] \\ &+ \sqrt{\gamma(1+\gamma)}\cosh[(\lambda-\mu)(x-v_1t) - (\lambda+\mu)(y-v_2t) + \delta]. \end{aligned} \tag{3.2.116}$$

注　对于 DSII 方程, 利用变量变换 $y \to -\mathrm{i}y$ 即可由 DSI 的孤立子解推出 DSII 的孤立子解.

3.3　双线性形法

本节我们利用双线性形方法并利用 Pada 近似法、指数函数法和 theta 函数的特殊性质导出 DS 方程的孤子解、N- 孤子解、局部孤波解、Solitoff 解, 以及双周期解, 并进而获得解的显式表示 (Satsuma J et al.　1979; Hietarinta J et al.　1990; Boiti M et al.　1988; Chow K W　1995, 2002).

双线性形方法也称为 Hirota 方法, 它是 1976 年由日本物理学家 Hirota 提出并将之应用于可积方程, 进而获得单孤立子解和多孤立子解的显式表示的一种行之有效的方法, 其主要优点是许多可积非线性发展方程都可以变为双线性形式, 其本质是寻求未知函数的某种变换 (一般而言, 可以利用 Painleve 试验方法得到这种变换) 将非线性偏微分方程, 特别是可积方程, 化为双线性形的微分方程, 然后用特定的函数类代入方程, 求出解的具体表达式.

我们引入双线性微分算子 D_x, D_t 的定义, $(D_y, D_z, \cdots)$ 类似定义.

$$D_t^m D_x^n f(x,t)\cdot g(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^n f(x,t)g(x',t')|_{\{x=x',t=t'\}}, \tag{3.3.1}$$

在偏微分算子 ∂_x 和双线性微分算子 D_x 之间经常用到如下的转换关系：

$$D_x(f\cdot g) = f_x g - f g_x,$$

$$D_x^2(f\cdot g)=f_{xx}g-2f_xg_x+fg_{xx},$$

$$D_x^3(f\cdot g)=f_{x^3}g-3f_{x^2}g_x+3f_xg_{x^2}-fg_{x^3},$$

$$D_x^4(f\cdot g)=f_{x^4}g-4f_{x^3}g_x+6f_{x^2}g_{x^2}-4f_xg_{x^3}+fg_{x^4},$$

$$D_xD_t(f\cdot g)=f_{xt}g-f_tg_x-f_xg_t+fg_{xt},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f/g)=\frac{D_xf\cdot g}{g^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f/g)=\frac{D_x^2f\cdot g}{g^2}-f/g\frac{D_x^2g\cdot g}{g^2},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}(f/g)=\frac{D_x^3f\cdot g}{g^2}-3\Big[\frac{D_xf\cdot g}{g^2}\cdot\frac{D_x^2g\cdot g}{g^2}\Big],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln f)=\frac{D_x^2f\cdot f}{2f^2},$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}(\ln f)=\frac{D_x^4f\cdot f}{2f^2}-6\Big[\frac{D_x^2f\cdot f}{2f^2}\Big]^2,$$

下面我们考虑 DS 方程:

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t-u_{xx}-\sigma^2u_{yy}+\nu u^2u^*=2vu, \\ v_{xx}-\sigma^2v_{yy}=\nu(uu^*)_{xx}, \end{cases} \tag{3.3.2}$$

当 $\sigma=1$ 式 (3.3.2) 是 DSI 方程, 而当 $\sigma=\mathrm{i}$ 式 (3.3.2) 是 DSII 方程. 我们这里利用 (Hirota 1973, Hirota R et al. 1990) 双线性微分方程结构上的某种对称性, 利用指数函数的结构求出单孤子解、双孤子解、N- 孤子解, 利用重朗斯基行列式求 N-dromion 解.

作变换

$$u=G/f,\qquad v=2(\ln f)_{xx},$$

其中, G 是复函数而 f 是实函数. 于是方程 (3.3.2) 变为如下双线性微分方程:

$$(\mathrm{i}D_t-D_x^2-\sigma^2D_y^2-C)G\cdot f=0,\qquad (D_x^2-\sigma^2D_y^2-C)ff=\nu GG^*. \tag{3.3.3}$$

式中, C 是常数. 利用自变量变换, 我们也可将式 (3.3.3) 写成如下形式 (将 $2(\ln f)_{xx}$ 改为 $\sigma_2(\ln f)_{xx},\sigma_2=\pm1$):

$$(\mathrm{i}D_t-\sigma_1D_x^2+D_y^2-\sigma_2\rho_0^2)G\cdot f=0,\quad (\sigma_1D_x^2+D_y^2-\sigma_2\rho_0^2)f\cdot f=-\sigma_2GG^*, \tag{3.3.4}$$

显然, 当 $\sigma_1=1,(-1)$ 时, 式 (3.3.4) 对应于 DSII (DSI) 方程. 应用 Pada 近似法求解. 令

$$f=1+\epsilon f^{(1)}+\epsilon^2f^{(2)}+\cdots,$$

$$G = g_0(1 + \epsilon h^{(1)} + \epsilon^2 h^{(2)} + \cdots), \tag{3.3.5}$$

将式 (3.3.5) 代入式 (3.3.4) 寻找最低阶项, 有

$$(\mathrm{i}\partial_t - \sigma_1 \partial_x^2 + \partial_y^2 - \sigma_2 \rho_0^2) g_0 = 0, \tag{3.3.6}$$

$$g_0 g_0^* = \rho_0^2, \tag{3.3.7}$$

其中, g_0 是式 (3.3.6) 的解

$$g_0 = \rho_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}, \quad \xi = kx + ly - \omega t + \xi^{(0)}, \quad \omega = -\sigma_1 k^2 + l^2 + \sigma_2 \rho_0^2, \tag{3.3.8}$$

利用式 (3.3.8), 式 (3.3.4) 改写为

$$\begin{aligned}&[(\mathrm{i}D_t - 2\sigma_1 k D_x + 2lD_y)\\ &-\sigma_1 D_x^2 + D_y^2](1 + \epsilon h^{(1)} + \epsilon^2 h^{(2)} + \cdots) \cdot (1 + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \cdots) = 0,\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

$$\begin{aligned}&(\sigma_1 D_x^2 + D_y^2 - \sigma_2 \rho_0^2)(1 + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \cdots) \cdot (1 + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \cdots)\\ =& -\sigma_2 \rho_0^2 (1 + \epsilon h^{(1)} + \epsilon^2 h^{(2)} + \cdots)(1 + \epsilon h^{(1)*} + \epsilon^2 h^{(2)*} + \cdots),\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

按 ϵ 的同次幂集项并令其为零, 得到

$$L_1^- f^{(1)} + L_1^+ h^{(1)} = 0, \tag{3.3.11a}$$

$$L_2 f^{(1)} = -\sigma_2 \rho_0^2 (h^{(1)} + h^{(1)*}), \tag{3.3.11b}$$

$$L_1^- f^{(2)} + L_1^+ h^{(2)} + [(\mathrm{i}D_t - 2\sigma_1 k D_x + 2lD_y) - \sigma_1 D_x^2 + D_y^2] h^{(1)} \cdot f^{(1)} = 0, \tag{3.3.12a}$$

$$L_2 f^{(2)} + (\sigma_1 D_x^2 + D_y^2 - \sigma_2 \rho_0^2) f^{(1)} \cdot f^{(1)} = -\sigma_2 \rho_0^2 (h^{(2)} + h^{(1)} h^{(1)*} + h^{(2)*}), \tag{3.3.12b}$$

$$L_1^- f^{(3)} + L_1^+ h^{(3)} + [(\mathrm{i}D_t - 2\sigma_1 k D_x + 2lD_y) - \sigma_1 D_x^2 + D_y^2](h^{(1)} \cdot f^{(2)} + h^{(2)} \cdot f^{(1)}) = 0, \tag{3.3.13a}$$

$$L_2 f^{(3)} + 2(\sigma_1 D_x^2 + D_y^2 - \sigma_2 \rho_0^2) f^{(1)} \cdot f^{(2)} = -\sigma_2 \rho_0^2 (h^{(3)} + h^{(1)} h^{(2)*} + h^{(1)*} h^{(2)} + h^{(3)*}), \tag{3.3.13b}$$

$$\begin{aligned}&L_1^- f^{(4)} + L_1^+ h^{(4)} + [(\mathrm{i}D_t - 2\sigma_1 k D_x + 2lD_y)\\ &-\sigma_1 D_x^2 + D_y^2](h^{(1)} \cdot f^{(3)} + h^{(2)} \cdot f^{(2)} + h^{(3)} \cdot f^{(1)}) = 0,\end{aligned} \tag{3.3.14a}$$

$$\begin{aligned}&L_2 f^{(4)} + 2(\sigma_1 D_x^2 + D_y^2 - \sigma_2 \rho_0^2)(2f^{(1)} \cdot f^{(3)} + f^{(2)} \cdot f^{(2)})\\ =& -\sigma_2 \rho_0^2 (h^{(4)} + h^{(1)} h^{(3)*} + h^{(2)*} h^{(2)} + h^{(1)*} h^{(3)} + h^{(4)*}),\end{aligned} \tag{3.3.14b}$$

$$\vdots$$

其中

$$L_1^+ = \mathrm{i}(\partial_t - 2\sigma_1 k\partial_x + 2l\partial_y) - \sigma_1\partial_x^2 + \partial_y^2,$$

$$L_1^- = -\mathrm{i}(\partial_t - 2\sigma_1 k\partial_x + 2l\partial_y) - \sigma_1\partial_x^2 + \partial_y^2,$$

$$L_2 = 2(\sigma_1\partial_x^2 + \partial_y^2 - \sigma_2\rho_0^2).$$

在式 (3.3.11) 中取

$$f^{(1)} = \mathrm{e}^{\eta_1}, \qquad h^{(1)} = \mathrm{e}^{\eta_1+\mathrm{i}\phi_1}, \tag{3.3.15}$$

其中, $\eta_i = P_i x + Q_i y - \Omega_i t + \eta_i^0$, 将式 (3.3.15) 代入式 (3.3.11) 得到

$$\Omega_1^\wedge \equiv \Omega_1 + 2\sigma_1 kP_1 - 2lQ_1 = \pm(\sigma_1 P_1^2 - Q_1^2)\sqrt{2\sigma_2\rho_0^2/(\sigma_1 P_1^2 + Q_1^2) - 1}, \tag{3.3.16}$$

$$\sin^2(\phi_1/2) = (\sigma_1 P_1^2 + Q_1^2)/2\sigma_2\rho_0^2, \tag{3.3.17}$$

在这样选取下, 所有高阶项全为零, 将式 (3.3.17) 代入式 (3.3.5) 并代入 u, v 的表达式, 从而得到单孤子解的显式表示

$$f = 1 + \mathrm{e}^{\eta_1}, \qquad h = 1 + \mathrm{e}^{\eta_1+\mathrm{i}\phi_1}, \tag{3.3.18}$$

这给出 envelope-hole 类孤子解

$$|u|^2 = \rho_0^2[1 - \sin^2(\phi_1/2)\mathrm{sech}^2(\eta_1/2)]. \tag{3.3.19}$$

如果我们选取

$$f^{(1)} = \mathrm{e}^{\eta_1} + \mathrm{e}^{\eta_2}, \qquad h^{(1)} = \mathrm{e}^{\eta_1+\mathrm{i}\phi_1} + \mathrm{e}^{\eta_2+\mathrm{i}\phi_2}, \tag{3.3.20}$$

并且

$$\Omega^\wedge = \pm(\sigma_1 P_i^2 - Q_i^2)\sqrt{2\sigma_2\rho_0^2/(\sigma_1 P_i^2 + Q_i^2) - 1}, \tag{3.3.21}$$

$$\sin^2(\phi_i/2) = (\sigma_1 P_i^2 + Q_i^2)/2\sigma_2\rho_0^2, \tag{3.3.22}$$

则从式 (3.3.12) 得到

$$f^{(2)} = D_{12}\mathrm{e}^{(\eta_1+\eta_2)}, \qquad h^{(2)} = D_{12}\mathrm{e}^{((\eta_1+\eta_2)+\mathrm{i}\phi_1+\mathrm{i}\phi_2)}, \tag{3.3.23}$$

其中

$$\begin{aligned} D_{12} = \{&-2\sigma_2\rho_0^2\sin(\phi_j/2)\cos[(\phi_i-\phi_j)/2] \\ &+(\sigma_1 P_i P_j + Q_i Q_j)\}\{-2\sigma_2\rho_0^2\sin(\phi_i/2)\sin(\phi_j/2) \\ &\cdot\cos[(\phi_i+\phi_j)/2] + (\sigma_1 P_i P_j + Q_i Q_j)\}^{-1}. \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

将式 (3.3.20), 式 (3.3.23) 代入式 (3.3.13) 和式 (3.3.14), 得到所有高阶项全为零, 从而得到双 Envelope-hole 解, 其中 u, v 中的 f, G 由下式给出

$$f = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + D_{12}e^{(\eta_1+\eta_2)}, \tag{3.3.25a}$$

$$G = 1 + e^{(\eta_1+i\phi_1)} + e^{(\eta_2+i\phi_2)} + D_{12}e^{(\eta_1+\eta_2 i\phi_1+i\phi_2)}. \tag{3.3.25b}$$

为了保证 f 是实的, 需要 $e^{\eta_1}, e^{\eta_2}, \phi_1, \phi_2$ 是实的, 或者 $e^{\eta_1^*} = e^{\eta_2}, \phi_1^* = \phi_2$. 由此我们还可得到 N- 孤子解

$$f \equiv f_N = \sum_{\mu=0,1} \exp\Big(\sum_{i<j}^{(N)} \mu_i\mu_j A_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\eta_i\Big), \tag{3.3.26}$$

$$h \equiv h_N = \sum_{\mu=0,1} \exp\Big(\sum_{i<j}^{(N)} \mu_i\mu_j A_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \mu_i(\eta_i + i\phi_i)\Big), \tag{3.3.27}$$

其中, $\exp A_{ij} = D_{ij}$.

利用双线性型, 取特殊形式的解我们可得到所谓的 dromion 解, 即局部孤波解 (Hietarinta J et al 1979; Boiti M et al 1988; Chow K W 1995, 2002).

我们考虑 DS 方程

$$iu_t + u_{xx} + u_{yy} = 4|u|^2u - 2uv,$$
$$v_{xx} - v_{yy} = -4(|u|^2)_{xx}, \tag{3.3.28}$$

同前, 我们作变换

$$u = G/f, \quad v = -2(\ln f)_{xx},$$

得到

$$(iD_t - D_x^2 + D_y^2)G \cdot f = 0, \qquad (D_x^2 - D_y^2)f \cdot f = -4GG^*, \tag{3.3.29a}$$

进一步在空间坐标作 $\pi/4$ 旋转得到

$$(iD_t + D_x^2 + D_y^2)G \cdot f = 0, \quad D_xD_yf \cdot f = 2GG^*, \quad \text{eqno} \tag{3.3.29b}$$

利用与式 (3.3.5)~ 式 (3.3.26) 同样的方法我们得到单孤子解和双孤子解

$$f = 1 + ke^{\eta+\eta^*}, \quad G = e^{\eta}, \tag{3.3.30}$$

$$\begin{aligned} f =& 1 + K_{11}e^{\eta_1+\eta_1^*} + K_{12}e^{\eta_1+\eta_2^*} + K_{21}e^{\eta_2+\eta_1^*} \\ &+ K_{22}e^{\eta_2+\eta_2^*} + K_{11}K_{12}K_{21}K_{22}L_{12}L_{12}^*e^{\eta_1+\eta_2+\eta_1^*+\eta_2^*}, \end{aligned} \tag{3.3.31a}$$

$$G=\mathrm{e}^{\eta_1}+\mathrm{e}^{\eta_2}+K_{11}K_{21}L_{12}\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_2+\eta_1^*}+K_{12}K_{22}L_{12}\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_2+\eta_2^*}, \tag{3.3.31b}$$

其中

$$\eta_j=p_jx+q_jy+\Omega_jt+\eta_j^0,\quad \Omega_j=\mathrm{i}(p_j^2+q_j^2), \tag{3.3.32}$$

$$K_{ij}=1/[(p_i+p_j^*)(q_i+q_j^*)],\quad L_{ij}=(p_i-p_j)(q_i-q_j). \tag{3.3.33}$$

局部单孤立波解 (one-dromion) 需要 η_i 平面波平行于坐标轴, 故 $p_2=0, q_1=0$, 再由于 f 的实性, 我们从双孤子解可导出单局部孤立波解

$$f=1+H_{11}\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_1^*}+H_{22}\mathrm{e}^{\eta_2+\eta_2^*}+H_{11}H_{22}|K_{12}L_{12}|^2\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_2^*}, \tag{3.3.34a}$$

$$G=L_{12}\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_2}, \tag{3.3.34b}$$

这里

$$H_{11}=k_{11}/(p_1+p_1^*), H_{22}=k_{22}/(q_2+q_2^*);\ \ |K_{12}L_{12}|^2=1+|L_{12}|^2/k_{11}k_{22}. \tag{3.3.35}$$

进一步, 我们通过构造重朗斯基行列式解去构造 N-dromion 解.

令

$$\phi=\phi(x,t),\qquad \psi=\psi(y,t)$$

满足线性方程

$$\phi_{xx}+\mathrm{i}\phi_t=0,\qquad \psi_{yy}-\mathrm{i}\psi_t=0, \tag{3.3.36}$$

利用这些函数构造 $2N\times 2N$ 阶矩阵行列式

$$\tau_n=\det\begin{pmatrix}\phi_1 & \phi_1' & \cdots & \phi_1^{(n-1)} & \psi_1 & \psi_1' & \cdots & \psi_1^{(2N-n-1)}\\ \phi_2 & \phi_2' & \cdots & \phi_2^{(n-1)} & \psi_2 & \psi_2' & \cdots & \psi_2^{(2N-n-1)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \phi_{2N} & \phi_{2N}' & \cdots & \phi_{2N}^{(n-1)} & \psi_{2N} & \psi_{2N}' & \cdots & \psi_{2N}^{(2N-n-1)}\end{pmatrix} \tag{3.3.37}$$

其中, 上标表示对 x, y 的微分阶数. 容易证明 τ 函数满足

$$(\mathrm{i}D_t+D_x^2+D_y^2)\tau_n\cdot\tau_{n+1}=0,\qquad n=0,\cdots,2N-1, \tag{3.3.38a}$$

$$D_xD_y\tau_n\cdot\tau_n=2\tau_{n+1}\tau_{n-1},\qquad n=0,\cdots,2N-1. \tag{3.3.38b}$$

为得到 N-dromion 解, 我们选取

$$\phi_i=\sum_{j=1}^{2N}a_{ij}\mathrm{e}^{\xi_j},\qquad \psi_i=\sum_{j=1}^{2N}b_{ij}\mathrm{e}^{\zeta_j}, \tag{3.3.39}$$

其中

$$\xi_j = P_j x + \mathrm{i}P_j^2 t, \qquad \zeta_j = Q_j y - \mathrm{i}Q_j^2 t. \tag{3.3.40}$$

$$P_{j+N} = -P_j^*, \quad Q_{j+N} = -Q_j^*, \quad j = 1, \cdots, N, \tag{3.3.41a}$$

因而有

$$\xi_{j+N} = -\xi_j^*, \quad \zeta_{j+N} = -\zeta_j^*, \quad j = 1, \cdots, N, \tag{3.3.41b}$$

我们约定下标模 $2N$, 于是式 (3.3.41) 对 $j = 1, \cdots, 2N$ 都成立. 利用对函数 f, G 的上述约定, 我们引入 $\tau^\sim$

$$\tau_n^\sim = \tau_n \exp(-\Sigma_{i=1}^N(\xi_{i+N} + \zeta_i)), \tag{3.3.42}$$

然后置

$$f = c\tau_N^\sim, \quad G = c\tau_{N+1}^\sim, \quad G^* = c\tau_{N-1}^\sim, \tag{3.3.43}$$

其中, 公共常数 c 在后面确定. 由式 (3.3.38) 和双线性方程在全部相变换下的不变性知式 (3.3.43) 满足式 (3.3.30b), 剩下的仅须表明 $c\tau_N^\sim$ 是实的而且 $c\tau_{N-1}^\sim = (c\tau_{N+1}^\sim)^*$.

我们先考虑单局部孤子, 当 $N = 1$ 时,

$$f = c\tau_1^\sim = c\mathrm{e}^{\xi_2 - \zeta_1}\begin{vmatrix} \phi_1 & \psi_1 \\ \phi_2 & \psi_2 \end{vmatrix}$$

$$= c([a_{\cdot 2}, b_{\cdot 1}] + [a_{\cdot 1}, b_{\cdot 1}]\mathrm{e}^{\xi_1 - \xi_2} + [a_{\cdot 2}, b_{\cdot 2}]\mathrm{e}^{-\zeta_1 + \zeta_2} + [a_{\cdot 1}, b_{\cdot 2}]\mathrm{e}^{\xi_1 - \xi_2 - \zeta_1 + \zeta_2}), \tag{3.3.44a}$$

$$G = \tau_2^\sim = c\mathrm{e}^{-\xi_2 - \zeta_1}\begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_1' \\ \phi_2 & \phi_2' \end{vmatrix} = c[a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}](P_2 - P_1)\mathrm{e}^{\xi_1 - \zeta_1}, \tag{3.3.44b}$$

$$G^* = \tau_0^\sim = c\mathrm{e}^{-\xi_2 - \zeta_1}\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_1' \\ \psi_2 & \psi_2' \end{vmatrix} = c[b_{\cdot 1}, b_{\cdot 2}](Q_2 - Q_1)\mathrm{e}^{-\xi_2 + \zeta_2}, \tag{3.3.44c}$$

这里我们已引进行列式符号 $[a_{\cdot i}, b_{\cdot j}], i, j$ 表示列, $\cdot$ 表示行的指标, 利用逐列代换

$$a_{\cdot 1} = \alpha_{\cdot 1}/(P_2 - P_1), \quad a_{\cdot 2} = \alpha_{\cdot 2}, \quad b_{\cdot 1} = \beta_{\cdot 1}, \quad b_{\cdot 2} = \beta_{\cdot 2}/(Q_2 - Q_1),$$

得到的解与式 (3.3.33) 一致, 当我们取 $P_1 = p_1, P_2 = -p_1^*, Q_1 = -q_2, Q_2 = q_2^*$ 时, 由上述构造自动推出式 (3.3.34) 的第 2 式并且对于 $c = \det\alpha$ 实性条件推得矩阵 $\alpha^{-1}\beta$ 是实的且其行列式等于 1.

对于 N-dromion 解, 注意到如果 $c\tau_0^\sim = (c\tau_{2N}^\sim)^*$ 和 $c\tau_1^\sim = (c\tau_{2N-1}^\sim)^*$, 则可以证明对所有 $n, c\tau_n^\sim = (c\tau_{2N-n}^\sim)^*$, 再由此证明 f 的实性 (Hietarinta J 等 1990).

最后, 利用双线性形求双周期解, 利用 theta 函数类解的极限形式求 solitoff 解, 结合 theta 函数方法, 利用椭圆函数和 theta 函数之间的转换关系 (Lawden D F

1989), 用两种不同的 theta 函数的组合 (对应于椭圆函数的两个不同模数) 作为可能的解代入双线性微分方程, 然后将方程的解对两个不同模数的制约条件转化为对波类解的波数的约束条件. 通过极限形式求孤子解和 solitoff 解 (Chow K W 1995, 1996, 2002).

我们回到式 (3.3.3). 为求出关于 x 和 y 的双周期解, 考虑到 theta 函数的对称性, 寻求两个 theta 函数的组合形式的解.

令

$$f=\theta_4(\alpha x,\tau)\theta_4(\beta y,\tau_1)+\theta_1(\alpha x,\tau)\theta_1(\beta y,\tau_1), \tag{3.3.45}$$

将式 (3.3.45) 代入式 (3.3.3) 的第二个方程, 再利用 theta 函数之间的关系, 我们得到 DSI 方程的两组显式解:

当 $\sigma=1,\nu=2$:

$$u=\lambda_1\Big[\frac{\theta_4(\alpha x,\tau)\theta_1(\beta y,\tau_1)+\theta_1(\alpha x,\tau)\theta_4(\beta y,\tau_1)}{\theta_4(\alpha x,\tau)\theta_4(\beta y,\tau_1)+\theta_1(\alpha x,\tau)\theta_1(\beta y,\tau_1)}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t},$$

$$v=\frac{R_1}{[\theta_4(\alpha x,\tau)\theta_4(\beta y,\tau_1)+\theta_1(\alpha x,\tau)\theta_1(\beta y,\tau_1)]^2}, \tag{3.3.46}$$

其中, 参数和色散关系式如下:

$$\alpha[\theta_3^2(0,\tau)-\theta_2^2(0,\tau)]=\beta[\theta_3^2(0,\tau_1)-\theta_2^2(0,\tau_1)],$$

$$\lambda_1^2=\beta^2\theta_2^2(0,\tau_1)\theta_3^2(0,\tau_1)-\alpha^2\theta_2^2(0,\tau)\theta_3^2(0,\tau),$$

$$\Omega=\alpha^2\Big[\frac{\theta_2''(0,\tau)}{\theta_2(0,\tau)}+\frac{\theta_3''(0,\tau)}{\theta_3(0,\tau)}+\frac{2\theta_4''(0,\tau)}{\theta_4(0,\tau)}\Big]-2\beta^2\theta_2^2(0,\tau_1)\theta_3^2(0,\tau_1), \tag{3.3.47}$$

$$\begin{aligned}R_1=&\alpha^2\theta_4^2(\beta y,\tau_1)\Big[\frac{2\theta_4''(0,\tau)\theta_4^2(\alpha x,\tau)}{\theta_4(0,\tau)}-2\theta_2^2(0,\tau)\theta_3^2(0,\tau)\theta_1^2(\alpha x,\tau)\Big]\\&+\alpha^2\theta_1^2(\beta y,\tau_1)\Big[\frac{2\theta_4''(0,\tau)\theta_1^2(\alpha x,\tau)}{\theta_4(0,\tau)}-2\theta_2^2(0,\tau)\theta_3^2(0,\tau)\theta_4^2(\alpha x,\tau)\Big]\\&+2\alpha^2\Big(\frac{\theta_2''(0,\tau)}{\theta_2(0,\tau)}+\frac{\theta_3''(0,\tau)}{\theta_3(0,\tau)}\Big)\theta_1(\alpha x,\tau)\theta_1(\beta y,\tau_1)\theta_4(\alpha x,\tau)\theta_4(\beta y,\tau_1).\end{aligned} \tag{3.3.48}$$

为了验证式 (3.3.46) 满足 DSI 方程, 我们将 theta 函数变换为椭圆函数, 以椭圆函数写出式 (3.3.46) 如下:

$$u=\lambda_1\Big(\frac{S_1+S}{1+SS_1}\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t},\quad S=\sqrt{k}sn(rx,k),\quad S_1=\sqrt{k_1}sn(sy,k_1), \tag{3.3.49}$$

$$v=2r^2\Big(1-\frac{E}{K}\Big)-2r^2\Big(\frac{k(S_1^2+S^2)+(1+k^2)SS_1}{(1+SS_1)^2}\Big), \tag{3.3.50}$$

其中, r, s 是新的波数, K, E 分别是第一, 二类椭圆积分, k, k_1 是椭圆函数的模

$$r=\alpha\theta_3^2(0,\tau),\quad s=\beta\theta_3^2(0,\tau_1),\quad k=\frac{\theta_2^2(0,\tau)}{\theta_3^2(0,\tau)},\quad k_1=\frac{\theta_2^2(0,\tau_1)}{\theta_3^2(0,\tau_1)},\quad k_1>k, \tag{3.3.51}$$

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}},\quad E=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}\mathrm{d}\xi.$$

波数和参数之间的制约关系如下:

$$\lambda_1^2=-r^2k+s^2k_1=r^2(1-k)^2\Big[\frac{k_1}{(1-k_1)^2}-\frac{k}{(1-k)^2}\Big], \tag{3.3.52}$$

$$r(1-k)=s(1-k_1),\quad \Omega=4r^2\Big(1-\frac{E}{K}\Big)-r^2(1+k^2)-2s^2k_1. \tag{3.3.53}$$

直接验证, 式 (3.3.49)~ 式 (3.3.53) 正是 DSI 方程的解.

当 $\sigma=1,\nu=2$, DSI 方程的另一组解是:

$$\begin{aligned}
u&=\lambda_2\Big[\frac{\theta_4(\alpha x,\tau)\theta_1(\beta y,\tau_1)-\theta_1(\alpha x,\tau)\theta_4(\beta y,\tau_1)}{\theta_4(\alpha x,\tau)\theta_4(\beta y,\tau_1)+\theta_1(\alpha x,\tau)\theta_1(\beta y,\tau_1)}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t},\\
v&=\frac{R_1}{[\theta_4(\alpha x,\tau)\theta_4(\beta y,\tau_1)+\theta_1(\alpha x,\tau)\theta_1(\beta y,\tau_1)]^2},\\
&\alpha[\theta_3^2(0,\tau)+\theta_2^2(0,\tau)]=\beta[\theta_3^2(0,\tau_1)+\theta_2^2(0,\tau_1)],\\
&\lambda_2^2=\beta^2\theta_2^2(0,\tau_1)\theta_3^2(0,\tau_1)-\alpha^2\theta_2^2(0,\tau)\theta_3^2(0,\tau),\\
\Omega&=\alpha^2\Big[\frac{\theta_2''(0,\tau)}{\theta_2(0,\tau)}+\frac{\theta_3''(0,\tau)}{\theta_3(0,\tau)}+\frac{2\theta_4''(0,\tau)}{\theta_4(0,\tau)}\Big]+2\beta^2\theta_2^2(0,\tau_1)\theta_3^2(0,\tau_1).
\end{aligned} \tag{3.3.54}$$

其椭圆函数形式的解

$$u=\lambda_2\Big(\frac{S_1-S}{1+SS_1}\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t},\quad S=\sqrt{k}sn(rx,k),\quad S_1=\sqrt{k_1}sn(sy,k_1),\quad k_1>k, \tag{3.3.55}$$

$$v=2r^2\Big(1-\frac{E}{K}\Big)-2r^2\Big(\frac{k(S_1^2+S^2)+(1+k^2)SS_1}{(1+SS_1)^2}\Big), \tag{3.3.56}$$

$$\lambda_2^2=-r^2k+s^2k_1=r^2(1+k^2)\Big[\frac{k_1}{(1+k_1)^2}-\frac{k}{(1+k)^2}\Big], \tag{3.3.57}$$

$$r(1+k)=s(1+k_1),\quad \Omega=4r^2\Big(1-\frac{E}{K}\Big)-r^2(1+k^2)+2s^2k_1. \tag{3.3.58}$$

特别地, 当 $k_1\to 1$ 时, 我们得到 solitoff 的一个序列. 所谓一个 solitoff 是指除了一个方向以外, 在所有方向衰减的波, 也称为一个半无穷孤立波.

$$u=\frac{r(1-k)}{2}\Big[\frac{\tanh sy-\sqrt{k}sn(rx,k)}{1+\sqrt{k}sn(rx,k)\tanh sy}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}, \tag{3.3.59}$$

$$v=2r^2\Big(1-\frac{E}{K}\Big)-2r^2\Big[\frac{k(ksn^2(rx,k)+\tanh^2 sy)+\sqrt{k}(1+k^2)sn(rx,k)\tanh sy}{(1+\sqrt{k}sn(rx,k)\tanh sy)^2}\Big], \tag{3.3.60}$$

$$s=\frac{r(1+k)}{2},\quad \Omega=4r^2\Big(1-\frac{E}{K}\Big)-\frac{r^2(1-k)^2}{2}. \tag{3.3.61}$$

当 $\sigma=\mathrm{i},\nu=2$, 式 (3.3.2) 是 DSII 方程, 我们寻求

$$f=\theta_4(\alpha x,\tau)\theta_4(\beta y,\tau_1)+\theta_2(\alpha x,\tau)\theta_2(\beta y,\tau_1) \tag{3.3.62}$$

形式的解, 将式 (3.3.62) 代入式 (3.3.3) 的第二个方程以寻求 G, 同时满足式 (3.3.3) 的第一个双线性方程. 从而得到 DSII 方程的解:

$$u=\lambda_3\Big[\frac{\theta_1(\alpha x,\tau)\theta_1(\beta y,\tau_1)+\mathrm{i}\theta_3(\alpha x,\tau)\theta_3(\beta y,\tau_1)}{\theta_4(\alpha x,\tau)\theta_4(\beta y,\tau_1)+\theta_2(\alpha x,\tau)\theta_2(\beta y,\tau_1)}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}, \tag{3.3.63}$$

$$\alpha\theta_3^2(0,\tau)=\beta\theta_3^2(0,\tau_1),$$

$$\lambda_3^2=\alpha^2\Big[\theta_4^2(0,\tau)\theta_4^2(0,\tau_1)-\theta_2^2(0,\tau)\theta_2^2(0,\tau_1)\Big]\frac{\theta_3^2(0,\tau)}{\theta_3^2(0,\tau_1)},$$

$$\Omega=\alpha^2\Big[\frac{\theta_3''(0,\tau)}{\theta_3(0,\tau)}+\frac{\theta_4''(0,\tau)}{\theta_4(0,\tau)}+\frac{2\theta_2''(0,\tau)}{\theta_2(0,\tau)}\Big]+\beta^2\theta_2^4(0,\tau_1), \tag{3.3.64}$$

$$v=\frac{R_2}{[\theta_4(\alpha x,\tau)\theta_4(\beta y,\tau_1)+\theta_2(\alpha x,\tau)\theta_2(\beta y,\tau_1)]^2},$$

$$\begin{aligned}R_2=&\alpha^2\theta_4^2(\beta y,\tau_1)\Big[2\theta_2^2(0,\tau)\theta_4^2(0,\tau)\theta_2^2(\alpha x,\tau)+\frac{2\theta_3''(0,\tau)\theta_4^2(\alpha x,\tau)}{\theta_3(0,\tau)}\Big]\\&+\alpha^2\theta_2^2(\beta y,\tau_1)\Big[\frac{2\theta_3''(0,\tau)\theta_2^2(\alpha x,\tau)}{\theta_3(0,\tau)}-2\theta_2^2(0,\tau)\theta_4^2(0,\tau)\theta_4^2(\alpha x,\tau)\Big]\\&+2\alpha^2\Big[\frac{\theta_2''(0,\tau)}{\theta_2(0,\tau)}+\frac{\theta_4''(0,\tau)}{\theta_4(0,\tau)}\Big]\theta_2(\alpha x,\tau)\theta_4(\alpha x,\tau)\theta_2(\beta y,\tau_1)\theta_4(\beta y,\tau_1),\end{aligned} \tag{3.3.65}$$

变换为椭圆函数解

$$u=\lambda_3\Big(\frac{S_1S+\mathrm{i}D_1D}{1+C_1C}\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t},\qquad S=\sqrt{k}sn(rx,k),$$

$$S_1=\sqrt{k_1}sn(ry,k_1),\quad k^2+k_1^2<1, \tag{3.3.66}$$

$$v=2r^2\Big(1-\frac{E}{K}\Big)-2r^2k^2+2r^2\Big[\frac{k\sqrt{1-k^2}(C^2-C_1^2)+(2k^2-1)C_1C}{(1+C_1C)^2}\Big], \tag{3.3.67}$$

$$r=\alpha\theta_3^2(0,\tau),\quad s=\beta\theta_3^2(0,\tau_1),\quad \lambda_3^2=r^2(\sqrt{1-k^2}\sqrt{1-k_1^2}-kk_1), \tag{3.3.68}$$

$$C=\frac{\sqrt{k}cn(rx,k)}{(1-k^2)^{1/4}},\quad C_1=\frac{\sqrt{k_1}cn(ry,k_1)}{(1-k_1^2)^{1/4}},\quad D=\frac{dn(rx,k)}{(1-k^2)^{1/4}}, \tag{3.3.69}$$

$$D_1 = \frac{dn(ry, k_1)}{(1-k_1^2)^{1/4}}, \quad \Omega = \frac{-4r^2E}{K} + r^2(2-k^2) + r^2k_1^2, \tag{3.3.70}$$

注意到当 $k_1 \to 1, k \to 0, \sqrt{k}/(1-k_1^2)^{1/4} = m, 0 < m < 1$ 时, 式 (3.3.66)~ 式 (3.3.70) 取如下极限形式, 从而我们得到 DSII 方程的新解 —— 周期孤子解:

$$u = \left(\frac{r\sqrt{1-m^2}\text{sech}ry}{1+m\cos rx\text{sech}ry}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r^2t}, \tag{3.3.71}$$

$$v = \frac{-2mr^2\text{sech}ry(\cos rx + m\text{sech}ry)}{(1+m\cos rx\text{sech}ry)^2}. \tag{3.3.72}$$

解 (3.3.71)、(3.3.72) 关于 x 是周期的而关于 y 衰减, 是周期孤子.

3.4　双孤子法和孤子共振

对于高维可积系统, 由于在高维空间涉及各种不同的局部孤子, 因此动力学性态比一维情形丰富得多, 不仅涉及孤立子解的多样性, 而且孤立波之间的相互作用也变得复杂化. 本节我们利用双线性形, 通过双孤立子方法和参数复值化寻找周期孤立子解并研究周期孤立波之间、周期孤立波和线状孤立波之间的相互作用 [Gilson C R　1992, Watanabe Y et al.　1998, Tajiri M et al.　2000).

我们研究 DS 方程

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t + \sigma^2 u_{xx} + u_{yy} = -|u|^2u + 2uv, \\ v_{xx} - \sigma^2 v_{yy} = (|u|^2)_{xx}, \end{cases} \tag{3.4.1}$$

其中, $\sigma^2 = \pm 1, \sigma^2 = 1$ 和 $\sigma^2 = -1$ 分别对应于 DSI 和 DSII 方程.

3.4.1　双孤子解

双孤子解可以写为

$$u = u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly-\omega t)}g/f, \quad v = -2(\ln f)_{xx}, \tag{3.4.2}$$

$$f = 1 + \mathrm{e}^{\eta_1} + \mathrm{e}^{\eta_2} + M\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_2},$$

$$g = 1 + \mathrm{e}^{\eta_1+\mathrm{i}\phi_1} + \mathrm{e}^{\eta_2+\mathrm{i}\phi_2} + M\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_2+\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)}, \tag{3.4.3}$$

代入式 (3.4.1) 再利用双线性形, 得到解 (3.4.3), 其中

$$\eta_j = K_jx + L_jy - \Omega_jt + \eta_j^0, \qquad \sin^2\frac{\phi_j}{2} = \frac{\sigma^2K_j^2 - L_j^2}{2u_0^2},$$

$$\Omega_j = 2kK_j + 2lL_j - (\sigma^2K_j^2 + L_j^2)\cot\frac{\phi_j}{2}, \qquad j = 1, 2. \tag{3.4.4}$$

取

$$K_1 = K_2 = \alpha, \quad L_1 = L_2^* = \mathrm{i}\delta, \quad \phi_1 = \phi_2 = \phi, \quad \mathrm{e}^{\eta_1^0} = \mathrm{e}^{\eta_2^{0^*}} = -(1/2)\mathrm{e}^{-\sigma' + \mathrm{i}\theta},$$

则有

$$\begin{cases} \sin^2 \dfrac{\phi}{2} = \dfrac{\alpha^2 + \delta^2}{2u_0^2}, \qquad M = \left[1 - \dfrac{(\alpha^2+\delta^2)^2}{2u_0^2\delta^2}\right]^{-1}, \\ \omega^2 = k^2 + l^2 - u_0^2, \\ \Omega_1 = \Omega_2^* = \Omega + \mathrm{i}\gamma = 2k\alpha + 2\mathrm{i}l\delta \pm (\alpha^2 - \delta^2)\sqrt{\dfrac{2u_0^2}{\alpha^2+\delta^2} - 1}. \end{cases} \tag{3.4.5}$$

于是得到在 y 方向周期而在 x 方向指数衰减的周期孤立子解

$$\begin{cases} u = u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly-\omega t+\phi)}[\cos\phi\cosh(\alpha x - \Omega t + \sigma') \\ \qquad +\mathrm{i}\sin\phi\sinh(\alpha x - \Omega t + \sigma') - \dfrac{1}{\sqrt{M}}\cos(\delta y - \gamma t + \theta)] \\ \qquad \cdot[\cosh(\alpha x - \Omega t + \sigma') - \dfrac{1}{\sqrt{M}}\cos(\delta y - \gamma t + \theta)]^{-1}, \\ v = -2\alpha^2[1 - \dfrac{1}{\sqrt{M}}\cosh(\alpha x - \Omega t + \sigma')\cos(\delta y - \gamma t + \theta)] \\ \qquad \cdot[\cosh(\alpha x - \Omega t + \sigma') - \dfrac{1}{\sqrt{M}}\cos(\delta y - \gamma t + \theta)]^{-2}. \end{cases} \tag{3.4.6}$$

如果我们取

$$K_1 = K_2^* = \mathrm{i}\beta, \quad L_1 = L_2^* = \mathrm{i}\delta, \quad \phi_1 = \phi_2 = \phi, \quad \eta_1^0 = \eta_2^{0^*},$$

$$\mathrm{e}^{\eta_1^0} = \mathrm{e}^{\eta_2^{0^*}} = -(1/2)\mathrm{e}^{-\sigma' + \mathrm{i}\theta},$$

则我们有

$$\Omega_1 = \Omega_2^* = \Omega + \mathrm{i}\gamma, \qquad \Omega = -(\delta^2 + \sigma^2\beta^2)\cot\frac{\phi}{2},$$

$$\gamma = 2k\sigma^2\beta + 2l\delta, \quad \sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{\delta^2 - \sigma^2\beta^2}{2u_0^2}, \quad M = \frac{2}{1+\cos\phi}.$$

于是得到增 - 衰模式周期孤立子解

$$\begin{cases} u = u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly-\omega t+\phi)}[\sqrt{M}\cosh(\Omega t + \sigma' - \mathrm{i}\phi) - \cos(\beta x + \delta y - \gamma t + \theta)] \\ \qquad \cdot[\sqrt{M}\cosh(\Omega t + \sigma') - \cos(\beta x + \delta y - \gamma t + \theta)]^{-1}, \\ v = 2\sigma^2\beta^2[\sqrt{M}\cosh(\Omega t + \sigma')\cos(\beta x + \delta y - \gamma t + \theta) - 1] \\ \qquad \cdot[\sqrt{M}\cosh(\Omega t + \sigma') - \cos(\beta x + \delta y - \gamma t + \theta)]^{-2}, \end{cases} \tag{3.4.7}$$

如果我们取

$$K_1 = K_2 = a, \quad L_1 = L_2 = b, \quad \phi_1 = -\phi_2 = \mathrm{i}\Phi, \quad \Omega_1 = \Omega_2^* = \Omega + \mathrm{i}\gamma,$$

其中, a, b 是实常数, 则有

$$\sinh^2\frac{\Phi}{2}=\frac{b^2-\sigma^2a^2}{2u_0^2},\qquad M=1+\frac{b^2-\sigma^2a^2}{2u_0^2},$$

$$\Omega=2(\sigma^2ka+lb),\qquad \gamma=(b^2+\sigma^2a^2)\sqrt{\frac{2u_0^2}{b^2-\sigma^2a^2}+1}.$$

从而我们得到呼吸型周期孤立子解

$$\left\{\begin{array}{l} u=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly-\omega t)}[\sqrt{M}\cosh\xi-\cosh\Phi\cos(\gamma t+\theta) \\ \quad +\mathrm{i}\sinh\Phi\sin(\gamma t+\theta)]\times[\sqrt{M}\cosh\xi-\cos(\gamma t+\theta)]^{-1}, \\ v=-2\sigma^2a^2M[1-(1/\sqrt{M})\cosh\xi\cos(\gamma t+\theta)] \\ \quad \cdot[\sqrt{M}\cosh\xi-\cos(\gamma t+\theta)]^{-2}, \end{array}\right. \tag{3.4.8}$$

其中, $\xi=ax+by-\Omega t+\sigma'$, 而 σ',θ 是任意相常数.

我们考虑式 (3.4.7) 长波的极限, 取

$$K_1=K_2^*=\mathrm{i}c\epsilon,\qquad L_1=L_2^*=\mathrm{i}d\epsilon,$$

$$\eta_1^0=\eta_2^{0^*}=\epsilon(\mathrm{i}\theta''-\theta'')+\mathrm{i}\pi,$$

并且令 $\epsilon\to 0$, 我们得到增 - 衰模式有理式解

$$\left\{\begin{array}{l} u=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly-\omega t)}\{1-[4\alpha(\alpha\pm\mathrm{i}\eta)]\times[\alpha^2+\eta^2+\xi^2]^{-1}\}, \\ v=-4\sigma^2c^2[\alpha^2+\eta^2-\xi^2]\times[(\alpha^2+\eta^2+\xi^2)]^{-2}, \end{array}\right. \tag{3.4.9}$$

其中,

$$\xi=cx+dy-\gamma t+\theta'',\quad \eta=\Omega t+\sigma'',\quad \Omega_1=\Omega_2^*=\Omega+\mathrm{i}\gamma,$$

$$\Omega=\pm(d^2+\sigma^2c^2)\sqrt{\frac{2u_0^2}{d^2-\sigma^2c^2}},\quad \gamma=2\sigma^2kc+2ld,\quad \alpha^2=\frac{d^2-\sigma^2c^2}{2u_0^2}.$$

有趣的是, 我们可以利用增 - 衰模式有理式解通过重叠而得到呼吸型周期孤立子解 (3.4.8). 事实上, 改写式 (3.4.9) 为

$$\left\{\begin{array}{l} u=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}\left[1\pm\dfrac{2\mathrm{i}\alpha}{\eta+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2+\alpha^2}}\right]\times\left[1\pm\dfrac{2\mathrm{i}\alpha}{\eta-\mathrm{i}\sqrt{\xi^2+\alpha^2}}\right], \\ v=-2\sigma^2c^2\left[\left\{\dfrac{1}{(\eta+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2+\alpha^2})^2}+\dfrac{1}{(\eta-\mathrm{i}\sqrt{\xi^2+\alpha^2})^2}\right\}\right. \\ \quad \left.+\dfrac{1}{(\eta+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2+\alpha^2})^2}\dfrac{1}{(\eta-\mathrm{i}\sqrt{\xi^2+\alpha^2})^2}\right], \end{array}\right. \tag{3.4.10}$$

其中, $\zeta = kx + ly - \omega t$, 我们假设如下形式的呼吸型解

$$\begin{cases} u = \bar{u}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}\Big\{1 + \mathrm{i}b\sum_m \dfrac{1}{\eta' + \mathrm{i}\nu(\xi) + m\pi}\Big\}\Big\{1 + \mathrm{i}b\sum_m \dfrac{1}{\eta' - \mathrm{i}\nu(\xi) + m\pi}\Big\}, \\ v = 4A\alpha^2\Big[\sum_m \dfrac{1}{(\eta' + \mathrm{i}\nu(\xi) + m\pi)^2} + \sum_m \dfrac{1}{(\eta' - \mathrm{i}\nu(\xi) + m\pi)^2} \\ \qquad + 4\alpha^2\Big\{\sum_m \dfrac{1}{(\eta' + \mathrm{i}\nu(\xi) + m\pi)^2}\Big\}\Big\{\sum_m \dfrac{1}{(\eta' - \mathrm{i}\nu(\xi) + m\pi)^2}\Big\}\Big], \end{cases} \tag{3.4.11}$$

其中, $\sum\limits_m$ 表示 $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{m=-N}^{N}$, 改写式 (3.4.11) 为

$$\begin{cases} u = \bar{u}_0(1-b^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}\Big[1 - \dfrac{2b}{1-b^2}\dfrac{b\cos 2\eta' - \mathrm{i}\sin 2\eta'}{\cosh 2\nu(\xi) - \cos 2\nu'}\Big], \\ v = 16A\alpha^2\Big[\dfrac{4\alpha^2 + 1 - \cos 2\nu(\xi)\cos 2\eta}{(\cosh 2\nu(\xi) - \cos 2\eta')^2}\Big], \end{cases} \tag{3.4.12}$$

特别取

$$\eta' = \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}(\Omega t + \sigma'), \qquad b = \Big[\frac{2u_0^2}{b^2 - \sigma^2 a^2} + 1\Big]^{-\frac{1}{2}} = \tanh\frac{\Psi}{2}, \tag{3.4.13}$$

$$A = -\frac{\sigma^2 a^2 u_0^2}{b^2 - \sigma^2 a^2}, \quad \bar{u}_0 = \frac{u_0}{1 - b^2}, \quad \sqrt{M} = \sqrt{1 + \frac{b^2 - \sigma^2 a^2}{2u_0^2}}, \tag{3.4.14}$$

$$\nu(\xi) = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{M}\cosh\xi + \sqrt{M\cosh^2\xi - 1}), \tag{3.4.15}$$

则式 (3.4.12) 正是式 (3.4.8).

Satsuma, Ablowitz 利用双线性型法得到双孤立波解 (见式 (3.3.25)), 如果取 $\exp(\eta_i^0) = -1, P_i \to 0, P_1/P_2 = O(1)$, 则我们有

$$f = 1 - \exp\eta_1 - \exp\eta_2 + D_{12}\exp(\eta_1 + \eta_2) = P_1P_2[(\theta_1\theta_2 + \alpha_{12}) + O(P)], \tag{3.4.16}$$

在 f 中取 $\theta_i \to \theta_i + 2\mathrm{i}B_i$ 得到长波 h 的极限

$$h = P_1P_2[(\theta_1 + 2\mathrm{i}B_1)(\theta_2 + 2\mathrm{i}B_2) + \alpha_{12} + O(P)]. \tag{3.4.17}$$

其中,

$$\theta_i = x + R_i y - [-2\sigma_1 k + 2lR_i + (\sigma_1 - R_i^2)/B_i]t,$$

$$B_i = \pm\sqrt{(\sigma_1 + R_i^2)/2\sigma_2\rho_0^2}, \quad \alpha_{ij} = \frac{4B_i^2B_j^2}{2B_iB_j - (\sigma_1 + R_iR_j)/\sigma_2\rho_0^2}.$$

于是令 $P_i \to 0$, 我们得到有理式解

$$u = \rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}\frac{(\theta_1 + 2\mathrm{i}B_1)(\theta_2 + 2\mathrm{i}B_2) + \alpha_{12}}{(\theta_1\theta_2 + \alpha_{12})}, \tag{3.4.18}$$

同时也得到 v 的显式表示, 特别取 $\theta_2=\theta_1^*, R_2=R_1^*, \sigma_1\sigma_2=-1$, 这就保证了 f 是实值. 改写式 (3.4.18) 并容易验证有如下形式的代数孤子解

$$\begin{cases} u=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}\left[1+\dfrac{2\mathrm{i}B}{\xi+\mathrm{i}\sqrt{\eta^2+A^2}}\right]\left[1+\dfrac{2\mathrm{i}B}{\xi-\mathrm{i}\sqrt{\eta^2+A^2}}\right], \\ v=2\sigma^2\left[\dfrac{1}{(\xi+\mathrm{i}\sqrt{\eta^2+A^2})^2}+\dfrac{1}{(\xi-\mathrm{i}\sqrt{\eta^2+A^2})^2}\right], \end{cases} \tag{3.4.19}$$

其中,

$$\zeta=kx+ly-\omega t,\quad \xi=x-\left(2\sigma^2k-\frac{\sigma^2-R^2}{B}\right)t+\xi^0,\quad B=\sqrt{\frac{\sigma^2+R^2}{2u_0^2}},$$
$$\eta=R(y-2lt)+\eta^0,\quad A^2=4B^2\Big/\left(2B^2-\frac{\sigma^2-R^2}{u_0^2}\right).$$

基于式 (3.4.19), 我们设 y 周期孤子解有如下形式

$$\begin{cases} u=\tilde{u}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}\left[1+\displaystyle\sum_m\frac{\mathrm{i}b}{\xi'+\mathrm{i}\nu(\eta)+\mathrm{i}m\pi}\right]\left[1+\displaystyle\sum_m\frac{\mathrm{i}b}{\xi'-\mathrm{i}\nu(\eta)+\mathrm{i}m\pi}\right], \\ v=\dfrac{\sigma^2\alpha^2}{2}\left[\displaystyle\sum_m\frac{1}{(\xi'+\mathrm{i}\nu(\eta)+\mathrm{i}m\pi)^2}+\sum_m\frac{1}{(\xi'-\mathrm{i}\nu(\eta)+\mathrm{i}m\pi)^2}\right]. \end{cases} \tag{3.4.20}$$

其中, 由非线性效应, 函数 $\sqrt{\eta^2+A^2}$ 变形为 η 的函数 $\nu(\eta)$, 稍后选定, 改写式 (3.4.20) 为

$$\begin{cases} u=\tilde{u}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}(1-b^2)\left[1-\dfrac{2b}{1-b^2}\dfrac{b\cos 2\nu(\eta)+\mathrm{i}\sinh 2\xi'}{\cosh 2\xi'-\cos 2\nu(\eta)}\right] \\ v=-2\sigma^2\alpha^2[1-\cos 2\nu(\eta)\cosh 2\xi'][\cosh 2\xi'-\cos 2\nu(\eta)]^2]^{-1} \end{cases} \tag{3.4.21}$$

我们特取

$$\tilde{u}_0=u_0\cos^2\frac{\phi}{2},\quad b=-\tan\frac{\phi}{2},\quad \xi'=\frac{1}{2}(\alpha x-\Omega t+\sigma'),$$
$$\nu(\eta)=\frac{1}{2}\arccos\left[\frac{1}{\sqrt{M}}\cos(\delta y-\gamma t+\theta)\right]. \tag{3.4.22}$$

将式 (3.4.22) 代入式 (3.4.21), 得到 y 周期孤子解

$$\begin{cases} u=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}\left(1-\tan^2\dfrac{\phi}{2}\right)\cos^2\dfrac{\phi}{2}\left[1-2\dfrac{\tan\dfrac{\phi}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\phi}{2}}\right. \\ \qquad\left.\cdot\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{M}}\tan\dfrac{\phi}{2}\cos(\delta y-\gamma t+\theta)-\mathrm{i}\sinh(\alpha x-\Omega t+\sigma')}{\cosh(\alpha x-\Omega t+\sigma')-\dfrac{1}{\sqrt{M}}\cos(\delta y-\gamma t+\theta)}\right], \\ v=-2\sigma^2\alpha^2\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{M}}\cosh(\alpha x-\Omega t+\sigma')\cos(\delta y-\gamma t+\theta)}{\left[\cosh(\alpha x-\Omega t+\sigma')-\dfrac{1}{\sqrt{M}}\cos(\delta y-\gamma t+\theta)\right]^2}, \end{cases} \tag{3.4.23}$$

其中,

$$M=\left[1-\frac{(\delta^2+\sigma^2\alpha^2)^2}{2u_0^2\delta^2}\right]^{-1}>1,\qquad \gamma=2l\delta,$$

$$\Omega=2\sigma^2k\alpha-(\sigma^2\alpha^2-\delta^2)\cot\frac{\phi}{2},\qquad \sin^2\frac{\phi}{2}=\frac{\delta^2+\sigma^2\alpha^2}{2u_0^2}$$

注意到式 (3.4.23) 正是式 (3.4.6) 的一种改写形式, 这表明 y 周期孤立子解也可以通过代数孤立子解的重叠求和而得到. 有趣的是, 在式 (3.4.21) 中取 $\lim\phi\to 0(\alpha\to 0,\delta\to 0,\delta/\alpha=R)$, 我们有

$$\xi'=\frac{\alpha}{2}\xi,\qquad \nu(\eta)=\frac{\alpha}{2}\sqrt{\eta^2+A^2},\qquad b=\alpha B,$$

这又表明解 (3.4.23) 对于很小的 ϕ 是代数孤立子解的简单和.

3.4.2 孤子共振

我们考虑孤子间的相互作用, 包括两个周期孤子之间、周期孤子与线孤子之间、两个 solitoff 解之间和 solitoff 与 dromion 解之间的相互作用.

首先, 考虑两个周期孤子之间的相互作用:

我们考虑 DSI 方程, 即 $\sigma^2=1$ 的情形, 这时利用变换 $u=g/f, v=-2(\ln f)_{xx}$ 式 (3.4.1) 变为双线性型, 类似于双孤子法得到两个 y 周期孤立子相互作用解

$$\begin{cases} f(\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2)=1+\dfrac{M_1}{4\alpha_1^4}\exp(2\xi_1)+\dfrac{M_2}{4\alpha_2^4}\exp(2\xi_2)+\dfrac{M_1M_2N_1^2N_2^2}{16\alpha_1^4\alpha_2^4}\exp(2\xi_1+2\xi_2)\\ \qquad -\dfrac{1}{\alpha_1^2}\exp(\xi_1)\left[1+\dfrac{M_2N_1N_2}{4\alpha_2^4}\exp(2\xi_2)\right]\cos(\eta_1)\\ \qquad -\dfrac{1}{\alpha_2^2}\exp(\xi_2)\left[1+\dfrac{M_1N_1N_2}{4\alpha_1^4}\exp(2\xi_1)\right]\cos(\eta_2)\\ \qquad +\dfrac{1}{2\alpha_1^2\alpha_2^2}\exp(\xi_1+\xi_2)[N_1\cos(\eta_1+\eta_2)+N_2\cos(\eta_1-\eta_2),\\ g(\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2,\phi_1,\phi_2)=u_0\exp[(\mathrm{i}(kx+ly-\omega t)]\times f(\xi_1+\mathrm{i}\phi_1,\xi_2+\mathrm{i}\phi_2,\eta_1,\eta_2), \end{cases}\tag{3.4.24}$$

其中,

$$M_j=\left[1-\frac{(\alpha_j^2+\delta_j^2)}{2\delta_j^2u_0^2}\right]^{-1},\tag{3.4.25a}$$

$$N_1=-\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\delta_1-\delta_2)^2-u_0^2\left[1-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_1-\phi_2)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi_1-\phi_2)})\right]}{(\alpha_1+\alpha_2)^2+(\delta_1+\delta_2)^2-u_0^2\left[1-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)})\right]},\tag{3.4.25b}$$

$$\xi_j=\alpha_jx-\Omega_jt+\sigma_j,\quad \eta_j=\delta_jy-\gamma_jt+\theta_j,\tag{3.4.25c}$$

$$\Omega_j = 2k\alpha_j + \epsilon(\alpha_j^2 - \delta_j^2)\sqrt{\frac{2u_0^2}{\alpha_j^2 + \delta_j^2} - 1}, \qquad \epsilon = \pm 1, \tag{3.4.25d}$$

$$\sin^2 \frac{\phi_j}{2} = \frac{\alpha_j^2 + \delta_j^2}{2u_0^2}, \quad \gamma_j = 2l\delta_j, \qquad j = 1, 2. \tag{3.4.25e}$$

N_2 由 N_1 中 δ_2 换为 $-\delta_2$ 而得到.

现在我们考虑在相互作用之后两个 y 周期孤立子之间的相漂移, 设 $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \Omega_1/\alpha_1 > \Omega_2/\alpha_2$, 两个分离的孤立子在相互作用前后分别由下式给出

$$f_1 = 1 + \frac{M_1}{4\alpha_1^4}\exp(2\xi_1) - \frac{1}{\alpha_1^2}\exp(\xi_1)\cos(\eta_1), \tag{3.4.26a}$$

$$f_2 = \frac{M_1}{4\alpha_1^4}\exp(2\xi_1)\left[1 + \frac{M_2 N_1^2 N_2^2}{4\alpha_2^4}\exp(2\xi_2) - \frac{N_1 N_2}{\alpha_2^2}\exp(\xi_2)\cos(\eta_2)\right] \tag{3.4.26b}$$

和

$$f_1 = \frac{M_2}{4\alpha_2^4}\exp(2\xi_2)\left[1 + \frac{M_1 N_1^2 N_2^2}{4\alpha_1^4}\exp(2\xi_1) - \frac{N_1 N_2}{\alpha_1^2}\exp(\xi_1)\cos(\eta_1)\right], \tag{3.4.27a}$$

$$f_2 = 1 + \frac{M_2}{4\alpha_2^4}\exp(2\xi_2) - \frac{1}{\alpha_2^2}\exp(\xi_2)\cos(\eta_2), \tag{3.4.27b}$$

注意到即使将 f, g 用 $\exp(ax+b)$ 相乘 (a, b 与 x 无关), u, v 也不变. 我们发现相互作用是如下形式：

$$([f_1(\xi_1, \eta_1), g_1(\xi_1, \eta_1, \phi_1)], [f_2(\xi_2 + \Gamma, \eta_2), g_2(\xi_2 + \Gamma, \eta_2, \phi_2)])$$

$$\to ([f_1(\xi_1 + \Gamma, \eta_1), g_1(\xi_1 + \Gamma, \eta_1, \phi_1)], [f_2(\xi_2, \eta_2), g_2(\xi_2, \eta_2, \phi_2)]),$$

其中, $\Gamma = \ln|N_1 N_2|$. 这表现出在周期孤立子之间相互作用导致作用后孤立子具有一个相漂移 Γ, 我们可以看到, 当 $|N_1 N_2| \to \infty$ 或者 0 时, ξ 的相漂移变为无穷大 ($\Gamma \to +\infty$, 或 $-\infty$). 在 $\alpha_1\alpha_2 > 0$ 的情形, $\lim \Gamma \to \infty$ 意味着孤立子一起传播的所谓中间区域的长度变为无穷大, 这可以理解为周期孤立子共振, 其条件由令 N_1 和 N_2 的分母分别等于零得到, 即

$$\sin^2 \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2}{2u_0^2} \tag{3.4.28a}$$

和

$$\sin^2 \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2}{2u_0^2}. \tag{3.4.28b}$$

当条件 (3.4.28) 满足时, 两个周期孤立子相互作用结果形成一个新的 y 周期孤立子, 它由式 (3.4.24) 给出, 其中

$$\phi=\phi_1+\phi_2,\qquad \alpha=\alpha_1+\alpha_2,$$

$$\Omega=\Omega_1+\Omega_2,\qquad \delta=\delta_1\pm\delta_2, \tag{3.4.29}$$

现在考虑 $\alpha_1\alpha_2>0, N_1N_2\to 0(\Gamma\to-\infty)$ 的情形, 这种情形视为长距离相互作用, 可类似讨论. 发生长距离相互作用的条件 $(N_1=0, N_2=0)$ 分别是

$$\sin^2\frac{\phi_1-\phi_2}{2}=\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\delta_1-\delta_2)^2}{2u_0^2} \tag{3.4.30a}$$

和

$$\sin^2\frac{\phi_1-\phi_2}{2}=\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\delta_1+\delta_2)^2}{2u_0^2}. \tag{3.4.30b}$$

周期孤立子与线孤立子的相互作用：周期孤立子与线孤立子的相互作用可表示为如下形式的解

$$u=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly-\omega t)}\frac{g}{f},\qquad v=-2(\ln f)_{xx},$$

其中,

$$\left\{\begin{aligned} f&=1-\frac{1}{\alpha^2}\exp(\xi_1)\cos\eta+\frac{M}{4\alpha^4}\exp(2\xi_1)\\ &\quad+\exp(\xi_2)\Big\{1-\frac{N}{\alpha^2}\exp(\xi_1)\cos\eta+\frac{MN^2}{4\alpha^4}\exp(2\xi_1)\Big\},\\ g&=1-\frac{1}{\alpha^2}\exp(\xi_1+\mathrm{i}\phi)\cos\eta+\frac{M}{4\alpha^4}\exp2(\xi_1+\mathrm{i}\phi)\\ &\quad+\exp(\xi_2-\mathrm{i}\psi)\Big\{1-\frac{N}{\alpha^2}\exp(\xi_1+\mathrm{i}\phi)\cos\eta+\frac{MN^2}{4\alpha^4}\exp2(\xi_1+\mathrm{i}\phi)\Big\}, \end{aligned}\right. \tag{3.4.31}$$

其中,

$$\xi_1=\alpha x-\Omega_p t+\sigma_1,\quad \xi_2=\beta x-\Omega_l t+\sigma_2,\quad \eta=\delta y-\gamma t+k,$$

$$\sin^2\frac{\phi}{2}=\frac{\alpha^2+\delta^2}{2u_0^2},\quad \sin^2\frac{\psi}{2}=\frac{\beta^2}{2u_0^2},\quad \gamma=2l\delta,$$

$$\Omega_p=2k\alpha-(\alpha^2-\delta^2)\cot\frac{\phi}{2},\quad \Omega_l=\beta\Big(2k-\beta\cot\frac{\psi}{2}\Big),$$

$$M=1/\Big[1-\frac{(\alpha^2+\delta^2)^2}{2\delta^2u_0^2}\Big],\quad N=\frac{2u_0^2\sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\phi-\psi}{2}-\alpha\beta}{2u_0^2\sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\phi+\psi}{2}-\alpha\beta}.$$

利用上述解, 我们可以研究在 y 周期孤立子与线孤立子碰撞后的相漂移. 同前, 条件 $|N| = \infty$ 对应于 $\alpha\beta > 0$ 情况下传播方向相漂移变为无穷大, 这意味着周期孤立子与线孤立子一起传播时, 处于中间状态的周期无限地保持, 这被理解为周期孤立子与线孤立子之间的共振, 由 N 的分母等于零, 此条件为

$$2u_0^2 \sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\phi+\psi}{2} - \alpha\beta = 0. \tag{3.4.32}$$

条件 $N = 0$ 对应于 $\alpha\beta > 0$ 情形传播方向的相漂移变为负无穷, 这意味着两个孤立子无限次相互作用相互分离, 这理解为在 y 周期孤立子与线孤立子之间的极端排斥或长距离相互作用. 此条件的显式表示为

$$2u_0^2 \sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\phi-\psi}{2} - \alpha\beta = 0. \tag{3.4.33}$$

solitoff-solitoff 相互作用和 solitoff-dromion 相互作用:

用直接法求出 DS 方程的 Grammian 行列式形式的解, 特别取不同的谱参数, 得到 solitoff 解和 dromion 解. 我们考虑 DS 方程

$$\mathrm{i}u_t + \Delta u + vu = 0, \qquad v_{xy} = 2\varDelta|u|^2, \tag{3.4.34}$$

其中, $\varDelta = \partial_x^2 + \partial_y^2$, 引入变换

$$u = G/f, \quad v = 2\Delta \ln f + a(x,t) + b(y,t), \tag{3.4.35}$$

方程 (3.4.34) 化为双线性型 (类似于式 (3.3.4))

$$(-\mathrm{i}D_t + D_x^2 + D_y^2)G\cdot f + [a(x,t) + b(y,t)]G\cdot f = 0, \tag{3.4.36}$$

$$D_xD_y f\cdot f = 2|G|^2, \tag{3.4.37}$$

从式 (3.4.37) 我们有

$$|u|^2 = (\ln f)_{xy}, \tag{3.4.38}$$

于是解取如下行列式形式

$$f = |I + H\varPhi|, \tag{3.4.39}$$

其中, H 是 Hermitian 矩阵, 而 $\varPhi$ 是 $(M+N)\times(M+N)$ 阶分块阵

$$\varPhi = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \phi_i\phi_j^* \mathrm{d}x & 0 \\ 0 & \displaystyle\int_{y}^{\infty} \psi_k\psi_l^* \mathrm{d}y \end{pmatrix}, \tag{3.4.40}$$

其中, ϕ,ψ 都满足 Schrödinger 类方程

$$-\mathrm{i}\phi_t+\phi_{xx}+2a(x,t)\phi=0, \tag{3.4.41}$$

$$\mathrm{i}\psi_t+\psi_{yy}+2b(y,t)\psi=0, \tag{3.4.42}$$

其中, * 表示复共轭, 我们取在 $x=-\infty$ 有适当渐近性态的 ϕ 和在 $y=\infty$ 有适当渐近性态的 ψ, 于是式 (3.4.40) 可简写为

$$\varPhi=\begin{pmatrix}\int\phi_i\phi_j^*\mathrm{d}x & 0\\ 0 & \int\psi_k\psi_l^*\mathrm{d}y\end{pmatrix}, \tag{3.4.43}$$

取 $a(x,t)=0,b(y,t)=0$, 从式 (3.4.41), 式 (3.4.42) 得到

$$\phi=\exp(px+\mathrm{i}p^2t), \tag{3.4.44}$$

$$\psi=\exp(-qy-\mathrm{i}q^2t). \tag{3.4.45}$$

下面我们取一个 ϕ 和一个 ψ, 得到 (1, 1) 类解, 包含孤立子解 (平面波)、solitoff 解和 dromion 解 (指数形衰减), 解的一般形式:

$$f=1+h_{11}\int\phi\phi^*\mathrm{d}x-h_{22}\int\psi\psi^*\mathrm{d}y-\begin{vmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{vmatrix}\times\int\phi\phi^*\mathrm{d}x\psi\psi^*\mathrm{d}y, \tag{3.4.46}$$

$$G=-\phi^*h_{12}\psi. \tag{3.4.47}$$

取 $h_{11}=h_{22}=0,h_{12}\neq 0,\mathrm{Re}p\cdot\mathrm{Re}q<0$, 在 $v,|u|^2$ 平面都得到平面波孤立子解; 取 $h_{12}=h_{21}^*\neq 0,h_{11}=0,h_{22}\neq 0$, 得到在 $|u|^2$ 平面的截断的孤立子解 (solitoff) 而在 v 平面得到连接在一点的三个平面波 $(\mathrm{Re}p\cdot\mathrm{Re}q<0)$; 取 $h_{11}\neq 0,h_{22}\neq 0$, 在 $|u|^2$ 平面得到局部孤立子解 (dromion) 而在 v 平面得到两个右边交叉的波解.

对于 (2, 1) 型解, 取

$$H=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & \cdots & 1\end{pmatrix}. \tag{3.4.48}$$

$$p_1=-2+0\mathrm{i},\ \ p_2=-0.7+\mathrm{i},\ \ q=1+0\mathrm{i}, \tag{3.4.49}$$

在 $|u|^2$ 平面仅有一个方向不衰减到零, 当时间从小的负值达到零再发展到正值时, 第一个 solitoff 变平而第二个 solitoff 从第一个的末端出现, 这一奇怪的性态在 v 平

面也发生, 由于共振, 一个 solitoff-solitoff 的相互作用导致一个孤立子分裂为两个孤立子. 而如果取

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.4.50}$$

$$p_1=-2+0\mathrm{i},\qquad p_2=-0.7+\mathrm{i},\qquad q=1+0\mathrm{i}, \tag{3.4.51}$$

在 $|u|^2$ 平面的性态与前面相同, 仅一个方向不衰减到零, 在 $t=0$ 是第一个 solitoff 变平, 这时在 solitoff 的末端出现了肿起的 dromion 解并且以常速离开, 在 y 平面, 当 $y\to-\infty$ 时, 存在两个相互靠近的平面波, 在 $t=0$ 时相互作用, 一旦它们彼此相互通过就产生一个 solitoff 类 vertex 和一个 dromion 类截断.

3.5　F 展开法

本节我们利用 F 展开法 (Zhou Y et al.　2004), 借助于齐次平衡原理和椭圆函数满足的一类非线性常微分方程作为辅助方程导出 DS 方程的精确解, 包括椭圆函数解、扭结波解和孤立波解, 所有这些解都是线状解.

我们考虑 DS 方程:

$$\mathrm{i}u_t+\frac{1}{2}\sigma^2(u_{xx}+\sigma^2u_{yy})+\alpha|u|^2u-uv=0, \tag{3.5.1}$$

$$v_{xx}-v_{yy}-2\alpha(|u|^2)_{xx}=0, \tag{3.5.2}$$

当 $\sigma^2=1$, 式 (3.5.1)、式 (3.5.2) 是 DSI 方程, 当 $\sigma^2=-1$, 式 (3.5.1)、式 (3.5.2) 是 DSII 方程. 一般地, F 展开法分为四步:

1) 将复方程化为实方程, 并做行波变换化为非线性常微分方程. 对于式 (3.5.1)、式 (3.5.2), 我们令

$$u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\phi(x,y,t),\qquad \eta=k_1x+k_2y+\omega t+\eta_0, \tag{3.5.3}$$

其中, $\phi(x,y,t)$ 是实函数, k_1,k_2,ω,η_0 都是待定常数. 将式 (3.5.3) 代入式 (3.5.1)、式 (3.5.2) 然后删去 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}$, 得到

$$\phi_t+2\sigma^2(k_1\phi_x+\sigma^2k_2\phi_y)=0, \tag{3.5.4}$$

$$\sigma^2(\phi_{xx}+\sigma^2\phi_{yy})+2(\alpha\phi^2-v)\phi-[\sigma^2(k_1^2+\sigma^2k_2^2)+2\omega]\phi=0, \tag{3.5.5}$$

$$v_{xx}-\sigma^2v_{yy}-2\alpha(\phi^2)_{xx}=0, \tag{3.5.6}$$

设 DS 方程有如下形式的行波解

$$\phi(x,y,t)=f(\xi),\quad v(x,y,t)=g(\xi),\quad \xi=\alpha_1 x+\alpha_2 y+\beta t+\xi_0, \tag{3.5.7}$$

这里, $\alpha_1,\alpha_2,\beta,\xi_0$ 是待定常数. 将式 (3.5.7) 代入式 (3.5.4)~ 式 (3.5.6), 我们得到非线性常微分方程组

$$\sigma^2(\alpha_1^2+\sigma^2\alpha_2^2)f''(\xi)+2\alpha f^3(\xi)-[\sigma^2(k_1^2+\sigma^2k_2^2)+2\omega]f(\xi)-2f(\xi)g(\xi)=0, \tag{3.5.8}$$

$$(\alpha_1^2-\sigma^2\alpha_2^2)g''(\xi)-2\alpha\alpha_1^2(f^2(\xi))''=0, \tag{3.5.9}$$

$$\beta=-\sigma^2(k_1\alpha_1+\sigma^2k_2\alpha_2), \tag{3.5.10}$$

这里 $''$ 表示关于 ξ 的二次微分. 积分式 (3.5.9) 同时设积分常数为零, 得到

$$(\alpha_1^2-\sigma^2\alpha_2^2)g'(\xi)-2\alpha(f^2(\xi))'=0,$$

再积分一次, 取积分常数 c, 得到

$$g(\xi)=\frac{c+2\alpha\alpha_1^2f^2(\xi)}{\alpha_1^2-\sigma^2\alpha_2^2}. \tag{3.5.11}$$

将式 (3.5.11) 代入式 (3.5.8) 推出

$$\begin{aligned}&\sigma^2(\alpha_1^2+\sigma^2\alpha_2^2)f''(\xi)+2\Big(\alpha-\frac{2\alpha\alpha_1^2}{\alpha_1^2-\sigma^2\alpha_2^2}\Big)f^3(\xi)\\&-\Big[\frac{2c}{\alpha_1^2-\sigma^2\alpha_2^2}+\sigma^2(k_1^2+\sigma^2k_2^2)-2\omega\Big]f(\xi)=0.\end{aligned} \tag{3.5.12}$$

2) 设式 (3.5.12) 有 $F(\xi)$ 多项式形式解, 其阶数为 m, 并设 $F(\xi)$ 满足如下非线性常微分方程

$$f(\xi)=a_0+a_1F(\xi)+a_2F(\xi)^2+\cdots+a_mF(\xi)^m, \tag{3.5.13}$$

$$F'^2(\xi)=q_0+q_2F^2(\xi)+q_4F^4(\xi), \tag{3.5.14}$$

在式 (3.5.12) 中利用 f'' 和 f^3 关于 F 的最高阶相同 (即所谓齐次平衡原理), 我们得到 $m=1$, 从而设定

$$f(\xi)=a_0+a_1F(\xi),\qquad a_1\neq 0, \tag{3.5.15}$$

a_0,a_1 是待定常数, q_0,q_2,q_4 是常数. 注意到式 (3.5.14) 的解无分支点因而是单值的. 将式 (3.5.15) 代入式 (3.5.12) 并利用式 (3.5.14), 则式 (3.5.12) 化为 F 的多项式, 令多项式的每一项系数为零得到 $a_0,a_1,\alpha_1,\alpha_2,k_1,k_2,\omega$ 的代数方程组

$$F^0:\Big(\alpha-\frac{2\alpha\alpha_1^2}{\alpha_1^2-\sigma^2\alpha_2^2}\Big)a_0^3-\Big[\frac{2c}{\alpha_1^2-\sigma^2\alpha_2^2}+\sigma^2(k_1^2+\sigma^2k_2^2)-2\omega\Big]a_0=0, \tag{3.5.16}$$

$$F: 3\Big(\alpha - \frac{2\alpha\alpha_1^2}{\alpha_1^2 - \sigma^2\alpha_2^2}\Big)a_0^2 a_1 + \frac{1}{2}\sigma^2(\alpha_1^2 + \sigma^2\alpha_2^2)a_1 q_2$$
$$-\Big[\frac{2c}{\alpha_1^2 - \sigma^2\alpha_2^2} + \sigma^2(k_1^2 + \sigma^2 k_2^2) - 2\omega\Big]a_1 = 0, \tag{3.5.17}$$

$$F^2: 3\Big(\alpha - \frac{2\alpha\alpha_1^2}{\alpha_1^2 - \sigma^2\alpha_2^2}\Big)a_0 a_1^2 = 0, \tag{3.5.18}$$

$$F^3: \Big(\alpha - \frac{2\alpha\alpha_1^2}{\alpha_1^2 - \sigma^2\alpha_2^2}\Big)a_1^3 + \sigma^2(\alpha_1^2 + \sigma^2\alpha_2^2)a_1 q_4 = 0. \tag{3.5.19}$$

第三步：解代数方程组 (3.5.16)~(3.5.19), 得到

$$a_0 = 0,\quad a_1 = \pm\sqrt{\frac{\alpha_1^2 - \sigma^2\alpha_2^2}{\alpha}\sigma^2 q_4}, \tag{3.5.20}$$

$$\omega = \frac{1}{2}\sigma^2[(\alpha_1^2 + \sigma^2\alpha_2^2)q_2 - (k_1^2 + \sigma^2 k_2^2)] - \frac{c}{\alpha_1^2 - \sigma^2\alpha_2^2}, \tag{3.5.21}$$

$$\beta = -\sigma^2(k_1\alpha_1 + \sigma^2 k_2\alpha_2),\quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0,\quad k_1^2 + k_2^2 \neq 0, \tag{3.5.22}$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, k_1, k_2$ 仅需要满足式 (3.5.22), a_1 能为实数.

对于 DSI ($\sigma^2 = 1$), $a_1 = \pm\sqrt{\dfrac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha}}$, 如果 $q_4 > 0, \{|\alpha_1| > |\alpha_2|, \alpha > 0\}$ 或者 $\{|\alpha_1| < |\alpha_2|, \alpha < 0\}$, 则 a_1 是实数;

而当 $q_4 < 0$ 时, $\{|\alpha_1 < |\alpha_2|, \alpha > 0\}$, 或者 $\{|\alpha_1| > |\alpha_2|, \alpha < 0\}$, 也有 a_1 是实的.

对于 DSII ($\sigma^2 = -1$), $a_1 = \pm\sqrt{-\dfrac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha}q_4}$, 当 $\alpha q_4 < 0$ 时, a_1 才为实数.

将式 (3.5.20)~ 式 (3.5.22) 代入式 (3.5.15) 而且利用式 (3.5.3), 式 (3.5.7) 和式 (3.5.11), 我们得到方程的解

$$u(x,y,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} f(\xi) = \pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sqrt{\frac{\alpha_1^2 - \sigma^2\alpha_2^2}{\alpha}\sigma^2 q_4}F(\xi), \tag{3.5.23}$$

$$v(x,y,t) = g(\xi) = \frac{c}{\alpha_1^2 - \sigma^2\alpha_2^2} + 2\alpha_1^2\sigma^2 q_4 F^2(\xi). \tag{3.5.24}$$

其中,

$$\omega = \frac{1}{2}[(\alpha_1^2 + \sigma^2\alpha_2^2)q_2 - (k_1^2 + \sigma^2 k_2^2)] - \frac{c}{\alpha_1^2 - \sigma^2\alpha_2^2},$$

并且 $F(\xi)$ 满足式 (3.5.14).

第四步：在式 (3.5.14) 中选取 q_0, q_2, q_4 的不同值, 得到对应的解 $F(\xi)$(Jacobi 椭圆函数), 再代入式 (3.5.23), 式 (3.5.24), 得到 DS 方程的解.

3.5.1 DSI

当 $\sigma^2=1$ 时, 式 (3.5.23), 式 (3.5.24) 分别为

$$u(x,y,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}f(\xi)=\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sqrt{\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha}q_4}F(\xi),\qquad 当\ \frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha}q_4>0 \tag{3.5.25}$$

和

$$v(x,y,t)=g(\xi)=\frac{c}{\alpha_1^2-\alpha_2^2}+2\alpha_1^2q_4F^2(\xi). \tag{3.5.26}$$

其中,

$$\omega=\frac{1}{2}[(\alpha_1^2+\alpha_2^2)q_2-(k_1^2+k_2^2)]-\frac{c}{\alpha_1^2-\alpha_2^2},$$

并且 $F(\xi)$ 满足式 (3.5.14).

用 Jacobi 椭圆函数表示的周期波解是:

如果 $q_0=1,q_2=-(1+m^2),q_4=m^2$, 则 $F(\xi)=sn\xi$, 因而当 $\dfrac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha}>0$,

$$u(x,y,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}f(\xi)=\pm m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sqrt{\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha}}sn\xi, \tag{3.5.27}$$

$$v(x,y,t)=g(\xi)=\frac{c}{\alpha_1^2-\alpha_2^2}+2\alpha_1^2m^2sn^2(\xi). \tag{3.5.28}$$

当 $m\to1$ 的极限情形, 式 (3.5.27), 式 (3.5.28) 变为

$$u(x,y,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}f(\xi)=\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sqrt{\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha}}\tanh\xi, \tag{3.5.29}$$

$$v(x,y,t)=g(\xi)=\frac{c}{\alpha_1^2-\alpha_2^2}+2\alpha_1^2\tanh^2(\xi). \tag{3.5.30}$$

如果 $q_0=1-m^2,q_2=2m^2-1,q_4=-m^2$, 则 $F(\xi)=cn\xi$, 因而当 $\dfrac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha}<0$, 有

$$u(x,y,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}f(\xi)=\pm m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sqrt{-\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha}}cn\xi, \tag{3.5.31}$$

$$v(x,y,t)=g(\xi)=\frac{c}{\alpha_1^2-\alpha_2^2}-2\alpha_1^2m^2cn^2(\xi). \tag{3.5.32}$$

如果 $q_0=m^2-1,q_2=2-m^2,q_4=-1$, 则 $F(\xi)=dn\xi$, 因此当 $\dfrac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha}<0$, 有

$$u(x,y,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}f(\xi)=\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sqrt{-\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha}}dn\xi, \tag{3.5.33}$$

$$v(x,y,t)=g(\xi)=\frac{c}{\alpha_1^2-\alpha_2^2}-2\alpha_1^2dn^2(\xi). \tag{3.5.34}$$

当 $m \to 1$, 式 (3.5.31)~ 式 (3.5.34) 变为在 $\dfrac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha}<0$ 条件下有

$$u(x,y,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}f(\xi)=\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sqrt{-\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha}}\mathrm{sech}\xi, \tag{3.5.35}$$

$$v(x,y,t)=g(\xi)=\frac{c}{\alpha_1^2-\alpha_2^2}-2\alpha_1^2\mathrm{sech}^2(\xi). \tag{3.5.36}$$

3.5.2 DSII

当 $\sigma^2=-1$, 式 (3.5.23), 式 (3.5.24) 为

$$u(x,y,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}f(\xi)=\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sqrt{-\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha}q_4}F(\xi), \tag{3.5.37}$$

$$v(x,y,t)=g(\xi)=\frac{c}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}-2\alpha_1^2q_4F^2(\xi). \tag{3.5.38}$$

$F(\xi)$ 满足式 (3.5.14).

用 Jacobi 椭圆函数表示的周期波解如下.

如果 $q_0=1, q_2=-(1+m^2), q_4=m^2$, 则 $F(\xi)=sn\xi$, 因此当 $\alpha<0$, 有

$$u(x,y,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}f(\xi)=\pm m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sqrt{-\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha}}sn\xi, \tag{3.5.39}$$

$$v(x,y,t)=g(\xi)=\frac{c}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}-2\alpha_1^2m^2sn^2\xi. \tag{3.5.40}$$

当 $m\to 1, sn\xi\to\tanh\xi$, 式 (3.5.39), 式 (3.5.40) 变为

$$u(x,y,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}f(\xi)=\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sqrt{-\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha}}\tanh\xi, \tag{3.5.41}$$

$$v(x,y,t)=g(\xi)=\frac{c}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}-2\alpha_1^2\tanh^2\xi. \tag{3.5.42}$$

如果 $q_0=1-m^2, q_2=2m^2-1, q_4=-m^2$, 则 $F(\xi)=cn\xi$, 因此当 $\alpha>0$, 有

$$u(x,y,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}f(\xi)=\pm m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sqrt{\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha}}cn\xi, \tag{3.5.43}$$

$$v(x,y,t)=g(\xi)=\frac{c}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}+2\alpha_1^2m^2cn^2\xi. \tag{3.5.44}$$

如果 $q_0=m^2-1, q_2=2-m^2, q_4=-1$, 则 $F(\xi)=dn\xi$, 因此当 $\alpha>0$, 有

$$u(x,y,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}f(\xi)=\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sqrt{\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha}}dn\xi, \tag{3.5.45}$$

$$v(x,y,t)=g(\xi)=\frac{c}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}+2\alpha_1^2dn^2\xi. \tag{3.5.46}$$

当 $m\to 1, cn\xi\to \mathrm{sech}\xi, dn\xi\to \mathrm{sech}\xi$, 式 (3.5.43)~ 式 (3.5.46) 变为在 $\alpha>0$ 条件下,

$$u(x,y,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}f(\xi)=\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sqrt{\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha}}\mathrm{sech}\xi, \tag{3.5.47}$$

$$v(x,y,t)=g(\xi)=\frac{c}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}+2\alpha_1^2\mathrm{sech}^2\xi. \tag{3.5.48}$$

3.6 驻波的稳定性研究

本节我们研究椭圆 - 椭圆型 DS 方程驻波的稳定性和不稳定性 (Cipolatti R 1992, 1993; Cazenave T 1989; Ohta M 1994, 1995), 由于 DS 方程由两个不同类型的非线性方程耦合而成, 情况复杂, 关于孤立波的稳定性研究至今未见到结果. 本节我们研究如下 DS 方程

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t+\lambda u_{xx}+u_{yy}+a|u|^2u+b_1uv_x=0,\\ v_{xx}+v_{yy}=b_2(|u|^2)_x, \end{cases} \tag{3.6.1}$$

其中, $\lambda, a, b_2>0$.

由第二个方程解出 v 代入第一个方程导致如下非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}u_t+\Delta u+a|u|^2u+bE_1(|u|^2)u=0,\qquad t\geqslant 0, x,y\in\mathbf{R}^2, \tag{3.6.2}$$

其中, $a,b\geqslant 0, b=b_1b_2, E_1$ 是算符为 $\sigma_1(\xi)=\xi_1^2/|\xi|^2$ 的奇异积分算子, 于是式 (3.6.1) 驻波的稳定性问题归结为对方程 (3.6.2) 的研究.

设式 (3.6.2) 有如下形式的驻波

$$u(x,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\phi_\omega(x,y),$$

这里, $\omega>0$, 而 ϕ_ω 是如下稳态问题的基态 (groundstate), 即所有非平凡 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\ \phi_\omega\ (x,y)$ 形式解中取极小作用的解

$$\begin{cases} -\Delta\psi+\omega\psi-a|\psi|^2\psi-bE_1(|\psi|^2)\psi=0,\\ \psi\in H^1(\mathbf{R}^2),\quad \psi\not\equiv 0. \end{cases} \tag{3.6.3}$$

我们引入符号

$$S_\omega(v)=\frac{1}{2}|\nabla v|_2^2+\frac{\omega}{2}|v|^2-\frac{a}{p+1}|v|_4^4-\frac{b}{4}\int|v|^2E_1(|v|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$\mathcal{X}_\omega =$ 方程 (3.6.3) 的解集 $= \{\psi \in H^1(\mathbf{R}^2) : S'_\omega(\psi) = 0, \psi \neq 0\}$,

$\mathcal{G}_\omega =$ 方程 (3.6.3) 的基态集 $= \{\phi \in \mathcal{G}_\omega : S_\omega(\phi) \leqslant S_\omega(\psi)$ 对所有 $\psi \in \mathcal{X}_\omega\}$.

关于驻波我们有下面的定理:

定理 3.6.1　设 $-a < b$, 则方程 (3.6.3) 有下面结论:

1) $\mathcal{X}_\omega$ 和 $\mathcal{G}_\omega$ 含有一个实值正函数.

2) $\phi \in \mathcal{G}_\omega$ 当且仅当 ϕ 是如下极小问题的解

$$\begin{cases} \phi \in \Sigma_0, \\ T(\phi) = \min\Big\{T(\psi) | \psi \in \Sigma_0\Big\}, \end{cases} \tag{3.6.4}$$

其中,

$$\Sigma_0 = \{\psi \in H^1 | \psi \neq 0, V_\omega(\psi) = 0\}, \qquad T(v) = |\nabla v|_2^2,$$

$$V_\omega(v) = \frac{a}{4}|v|_4^4 + \frac{b}{4}\int |v|^2 E_1(|v|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\omega}{2}|v|_2^2.$$

为了证明定理, 我们需要如下引理.

引理 3.6.2　设 $0 < q < \infty$, 则存在常数 $c > 0$, 使得对所有的 $\psi \in H^1$ 有

$$|\psi|_{q+2}^{q+2} \leqslant c\left(\sup_y \int_{B_1(y)} (|\nabla\psi|^2 + |\psi|^2)\right)^{q/2} \|\psi\|_{H^1}^2,$$

其中, $B_1(y) = \displaystyle\int E_1(y)\bar{y}$, 由 Fourier 变换性质知有 $B_1(y) \leqslant |y|_2^2$.

证明　用单位正方体序列 $\{C_j\}$ 覆盖 $\mathbf{R}^2$ 使得如果 $j \neq k, C_j \cap C_k = \varnothing$. 于是我们得到

$$|\psi|_{q+2}^{q+2} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{C_j} |\psi|^{q+2}$$

和

$$\|\psi\|_{H^1}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{C_j} (|\nabla\psi|^2 + |\psi|^2).$$

因此由 Sobolev 嵌入定理推得

$$\begin{aligned} \int_{C_j} |\psi|^{q+2} &\leqslant c\Big(\int_{C_j} (|\nabla\psi|^2 + |\psi|^2)\Big)^{(q+2)/2} \\ &\leqslant c\Big(\sup_{j \in N} \int_{C_j} (|\nabla\psi|^2 + |\psi|^2)\Big)^{q/2} \int_{C_j} (|\nabla\psi|^2 + |\psi|^2). \end{aligned}$$

这里 c 仅依赖于 q. 将上述不等式对 j 求和得到

$$|\psi|_{q+2}^{q+2} \leqslant c\left(\sup_{j\in N}\int_{C_j}(|\nabla\psi|^2+|\psi|^2)\right)^{q/2}\|\psi\|_{H^1}^2.$$

由此推得结论.

对每一个 $\mu\in\mathbf{R}$, 我们定义

$$\Sigma_\mu=\{\psi\in H^1|\psi\neq 0, V_\omega(\psi)=\mu\}, \tag{3.6.5}$$

$$j(\mu)=\inf\left\{\frac{1}{2}T(\psi)|\psi\in\Sigma_\mu\right\}. \tag{3.6.6}$$

我们有如下引理.

引理 3.6.3 设 $p=3, -a<b$ 则下面结论成立:

1) 对所有的 $\mu\in\mathbf{R}, \Sigma_\mu\neq\varnothing$.

2) 存在常数 $I>0$, 使得对所有的 $\mu\in\mathbf{R}, j(\mu)=I$.

证明 设 $\phi\in H^1, \phi\neq 0$, 对 $\lambda>0$, 定义 $\phi_\lambda(x)=\phi(\lambda^{-1/2}x)$. 如果 $\epsilon>0$ 充分小, 则 $V_\omega(\epsilon\phi)<0$, 而由于对所有的 $\lambda>0, V_\omega((\epsilon\phi)_\lambda)=\lambda V_\omega(\epsilon\phi)$.

这就推得对所有的 $\mu<0, \Sigma_\mu\neq 0$, 为了证明对所有的 $\mu\geqslant 0, \Sigma_\mu\neq 0$. 我们只需要证明

$$\exists\phi_0\in H^1|V_\omega(\phi_0)>0. \tag{3.6.7}$$

事实上, 如果式 (3.6.7) 成立, 则存在 $\tau_0<1$, 使得 $V_\omega(\tau_0\phi_0)=0$, 于是推得 $\Sigma_0\neq\emptyset$. 此外由于对所有的 $\lambda>0, V_\omega(\phi_{0\lambda})=\lambda V_\omega(\phi_0)$, 这就推得: 对所有的 $\lambda>0, \Sigma_\mu\neq\emptyset$. 在引理条件下, 利用 Fourier 变换的性质和简单的变量代换容易得到存在 $\phi\in H^1$, 使得

$$\frac{b}{4}B_1(|\phi|^2)+\frac{a}{4}|\phi|_4^4>0.$$

取 $\phi_0=\tau\phi, \tau$ 充分大, 式 (3.6.7) 成立.

其次证明 2), 令

$$I=j(0)=\inf\left\{\frac{1}{2}T(\psi)|\psi\in\Sigma_0\right\},$$

为了证明 $I>0$, 我们考虑 $\psi\in\Sigma_0$. 由 $B_1(\psi)\leqslant|\psi|_2^2$, 我们有

$$\frac{\omega}{2}|\psi|_2^2\leqslant\frac{b}{4}|\psi|_4^4+\frac{|a|}{4}|\psi|_4^4. \tag{3.6.8}$$

由 Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式得到

$$|\psi|_4^4\leqslant c_1|\nabla\psi|_2^2|\psi|_2^2, \tag{3.6.9}$$

于是得到

$$\omega/2 \leqslant c' T(\psi).$$

这推得 $I > 0$. 记 $\psi_\lambda(x) = \psi(\lambda^{-1/2}x)$, 我们有

$$\psi \in \Sigma_\mu \Longleftrightarrow \psi \in \Sigma_\mu.$$

由于对所有的 $\lambda > 0, T(\psi_\lambda) = T(\psi)$. 我们推得 $j(\mu)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, \infty)$ 上必须是常数. 令 $\mu_n \downarrow 0, \epsilon > 0$, 存在 $\psi \in \Sigma_0$ 使得

$$I < \frac{1}{2}t(\psi) < I + \epsilon,$$

取 $\tau_n > 1$ 使得 $V_\omega(\tau_n\psi) = \mu_n$, 我们有

$$j(\mu_n) - I < \frac{1}{2}(\tau_n^2 - 1)T(\psi) + \epsilon,$$

从而我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \sup(j(\mu_n) - I) \leqslant 0. \tag{3.6.10}$$

另一方面, 令 $\psi_n \in \Sigma_\mu$ 使得

$$\frac{1}{2}T(\psi_n) < j(\mu_n) + \epsilon.$$

取 $\tau_n < 1$ 使得 $\tau_n\psi_n \in \Sigma_0$, 这就推得

$$I \leqslant \frac{1}{2}T(\tau_n\psi_n) = \frac{1}{2}\tau_n^2 T(\psi_n) < j(\mu_n) + \epsilon.$$

然后我们又得到

$$\lim_{n\to\infty} \inf(j(\mu_n) - I) \geqslant 0. \tag{3.6.11}$$

结合式 (3.6.10) 和式 (3.6.11), 我们得到对于 $\mu \in [0, \infty)$,

$$j(\mu) = I.$$

对 $\mu_n \uparrow 0$ 用同样的推理得到当 $\mu \in (-\infty, 0], j(\mu) = I$.

推论 由式 (3.6.5) 和式 (3.6.6), 对于 $j(\mu)$ 有次可加性

$$\begin{cases} \forall \mu > 0, \\ j(\mu) < j(\lambda) + j(\mu - \lambda), \quad \forall \lambda \in (0, \mu). \end{cases} \tag{3.6.12}$$

引理 3.6.4 在引理 3.6.3 同样条件下, 问题 (3.6.4) 等价于

$$\begin{cases} V_\omega(\phi) = 0, \quad \phi \neq 0, \\ T(\phi) = \min\{T(\psi) | V_\omega(\psi) \geqslant 0\}. \end{cases} \tag{3.6.13}$$

证明 令

$$\bar{I}=\inf\left\{\frac{1}{2}T(\psi),V_{\omega}(\psi)\geqslant 0\right\},\quad I=\inf\left\{\frac{1}{2}T(\psi),V_{\omega}(\psi)=0\right\},$$

显然, $\bar{I}\leqslant I$. 如果 $\psi\in H^1,\psi\neq 0$, 且使得 $V(\psi)\geqslant 0$, 我们可以得到对于 $0<\tau<1$, 有 $V(\tau\psi)=0$, 于是由

$$I\leqslant T(\tau\psi)=\tau^2T(\psi)\leqslant T(\psi).$$

立刻推得结论.

我们证明定理 3.6.1, 证明分为四步:

第一步: 问题 (3.6.3) 有一个解. 令 $\{\psi_n\}$ 是一个极小化序列, 我们定义 $\phi_n(x,y)=\psi_n(\sqrt{\Lambda_n}x,\sqrt{\Lambda_n}y)$, 其中 $\Lambda_n=|\psi_n|_2^2$.$\{\phi_n\}$ 也是一个极小化序列, 这是因为

$$T(\phi_n)=T(\psi_n),\qquad V_{\omega}(\phi_n)=\frac{1}{\Lambda}V_{\omega}(\psi_n).\tag{3.6.14}$$

由于 $|\phi_n|_2^2=\dfrac{1}{\Lambda}|\psi_n|_2^2=1$, 这推得 $\{\phi_n\}$ 在 H^1 中有界, 于是可设存在 ϕ 使得在 H^1 中成立弱收敛:

$$\phi_n\rightharpoonup\phi.\tag{3.6.15}$$

应用集中紧致原理于

$$\rho_n=|\nabla\phi_n|^2+|\phi_n|^2,$$

然后我们注意到当 $n\to\infty$,

$$\int\rho_n=\tilde{\lambda}_n\to\tilde{\lambda}=2I+1>0.$$

如果成为零出现, 则令 $n\to\infty$, 由引理 3.6.2 我们得到

$$\begin{cases}B_1(|\phi_n|^2)\to 0,\\ |\phi_n|_4\to 0.\end{cases}\tag{3.6.16}$$

由于 $\phi_n\in\Sigma_0$, 由式 (3.6.16) 我们必须有 $n\to\infty,|\phi_n|_2\to 0$, 因为 $|\phi_n|_2^2=1$, 故这是不可能的, 成为零不可能出现.

其次, 如果"二分"情况出现, 则对于所有的 $\epsilon>0$, 我们可以找到 $R_0>0,\{y_n\}\subset\mathcal{R}^2,R_n\to+\infty(n\to\infty)$ 和在 H^1 中有界的 ϕ_n^1,ϕ_n^2, 所有的都依赖于 ϵ, 使得

$$\text{i}\quad \text{supp}\phi_n^1\subset B_{R_0}(y_n),\tag{3.6.17}$$

$$\text{ii}\quad \text{supp}\phi_n^2\subset\mathcal{R}^2\backslash B_{R_n}(y_n),\tag{3.6.18}$$

$$\text{iii}\quad \|\phi_n - \phi_n^1 - \phi_n^2\|_{H^1} \leqslant \epsilon, \tag{3.6.19}$$

$$\text{iv}\quad |\nabla\phi_n|_2^2 - |\nabla\phi_n^1|_2^2 - |\nabla\phi_n^2|_2^2 \geqslant -c\epsilon, \tag{3.6.20}$$

$c>0$, 依赖于 ϵ. 由于 $\phi_n^j \neq 0, j=1,2$, 由式 (3.6.20) 推得：对于 n 充分大, 有

$$I+\epsilon > \frac{1}{2}T(\phi_n) \geqslant \frac{1}{2}T(\phi_n^1) + \frac{1}{2}T(\phi_n^2) - \frac{c}{2}\epsilon \geqslant j(V_\omega(\phi_n^1)) + j(V_\omega(\phi_n^2)) - \frac{c}{2}\epsilon.$$

由引理 3.6.3 我们得到 $I+\epsilon > 2I - \frac{c}{2}\epsilon$, 如果 ϵ 充分小, 这是不可能的, 因此 “二分” 情况不可能出现. 从而, 我们有 “集中” 性, 这意味着存在一个序列 $\{y_n\} \in \mathcal{R}^2$, 对于它有 $\forall\epsilon>0, \exists R_\epsilon \geqslant 1/\epsilon$ 使得

$$\int_{B_{R_\epsilon}(y_n)^c} \rho_n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \epsilon, \tag{3.6.21}$$

其中, $B_{R_\epsilon}(y_n)^c = \mathcal{R}^2 \backslash B_{R_\epsilon}(y_n)$. 记 $\tilde{\phi}_n(\cdot) = \phi_n(\cdot, -y_n)$. 则从式 (3.6.15) 我们得到：在 H^1 中 $\tilde{\phi}_n$ 弱收敛到 $\tilde{\phi}$. 此外, 从式 (3.6.21) 和 Sobolev 不等式推得对任何 $p \in [2,\infty)$,

$$\int_{B_{R_\epsilon}^c} |\tilde{\phi}|^p \leqslant \epsilon^{p/2}, \tag{3.6.22}$$

其中, $B_{R_\epsilon} = B_{R_\epsilon}(0)$, 记

$$V_\Omega(\psi) = \int_\Omega psi|^2 \left\{\frac{b}{4}E_1(|\psi|^2) + \frac{a}{4}|\psi|^2 - \frac{\omega}{2}\right\}.$$

由式 (3.6.22) 得到

$$|V_{B_{R_\epsilon}^c}(\tilde{\phi}_n)| \leqslant \delta(\epsilon), \tag{3.6.23}$$

这里, 当 $\epsilon \to 0$ 时 $\delta(\epsilon) \to 0$. 由于对 $q \in [1,\infty), H^1(B_{R_\epsilon})$ 嵌入到 $L^q(B_{R_\epsilon})$ 是紧的, 故当 $n \to \infty$ 时有

$$V_{B_{R_\epsilon}}(\tilde{\phi}_n) \to V_{B_{R_\epsilon}}(\tilde{\phi}). \tag{3.6.24}$$

此外, $0 = V(\tilde{\phi}_n) = V_{B_{R_\epsilon}}(\tilde{\phi}_n) + V_{B_{R_\epsilon}^c}(\tilde{\phi}_n)$. 由式 (3.6.23) 我们有

$$|V_{B_{R_\epsilon}}(\tilde{\phi}_n)| \leqslant \delta(\epsilon). \tag{3.6.25}$$

在式 (3.6.25) 中令 $n \to \infty$, 利用式 (3.6.24) 有

$$|V_{B_{R_\epsilon}}(\tilde{\phi})| \leqslant \delta(\epsilon).$$

现在, 令 $\epsilon \to 0$, 我们得到 $\tilde{\phi} \in \Sigma_0$ 和由 T 的半连续性推得结论.

第二步：证明 $\mathcal{X}_\omega$ 非空.

令 ϕ 是 (3.6.4) 的一个解. 则存在一个 Lagrange 乘子 λ 使得

$$-\Delta\phi = \lambda(bE_1(|\phi|^2)\phi + a|\phi|^2\phi - \omega\phi). \tag{3.6.26}$$

为了证明 $\lambda > 0$, 令 $\Phi \in H^1$ 使得 $\langle V_\omega'(\phi), \Phi\rangle > 0$, 其中, $\langle;\rangle$ 表示 $H^{-1}-H^1$ 共轭对. 由于 $T, V \in C^1(H^1, \mathcal{R})$, 我们得到

$$\begin{cases} V_\omega(\phi + t\Phi) = V_\omega(\phi) + \displaystyle\int_0^t \langle V_\omega'(\phi + s\Phi), \Phi\rangle \mathrm{d}s, \\ T(\phi + t\Phi) = T(\phi) + t\lambda\langle V_\omega'(\phi), \Phi\rangle + \dfrac{t^2}{2}|\nabla\Phi|_2^2, \end{cases} \tag{3.6.27}$$

假如 $\lambda < 0$, 从式 (3.6.27) 我们得到, 对于 t 充分小, $V_\omega(\phi+t\Phi) > 0, T(\phi+t\Phi) < T(\phi)$, 这与引理 3.6.4 矛盾. 因此, $\lambda > 0$. 现在令 $\phi_\lambda(x, y) = \phi(x/\sqrt{\lambda}, y/\sqrt{\lambda})$, 我们推得 $\phi_\lambda \in \mathcal{X}_\omega$.

第三步：我们证明 2).

令 ϕ 是 (3.6.4) 的一个解, 令 $\psi \in \mathcal{X}_\omega$. 从 (3.6.3) 得到 $\psi \in \Sigma_0$. 因此, $S_\omega(\phi) \leqslant S_\omega(\psi), \phi \in \mathcal{G}$. 反过来, 设 $\phi \in \mathcal{G}$. 则对所有的 $\psi \in S_\omega, S_\omega(\phi) \leqslant S_\omega(\psi)$. 从 (3.6.3) 容易推出 $V_\omega(\phi) = V_\omega(\psi)$ 进而推得 ϕ 是 (3.6.3) 的解.

第四步：证明 1). 我们注意到由第一和第三步得到 $\mathcal{G} \neq \emptyset$. 由 Cazenave (1989) 关于非线性 Schrödinger 方程的引理 3.7 立得结论. 接下来我们证明驻波的稳定性.

假设 (H) : 假设存在一种选择 $\phi_\omega \in \mathcal{X}_\omega$ 使得 $\omega \mapsto \phi_\omega$ 是从 $(0,\infty)$ 到 $H^1(\mathbf{R}^2)$ 的 C^1 映射. 又设对任何 $\phi \in \mathcal{G}_\omega$

$$|\phi|_2 = |\phi_\omega|_2. \tag{3.6.28}$$

定义 如果对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得有如下性质：如果 $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^2)$ 是以 $u(0) = u_0$ 为初值的方程 (3.6.2) 的解 $u(t)$ 满足 $\|u_0 - \phi_\omega\|_{H^1} < \delta$, 则有

$$\sup_{0\leqslant t<\infty} \inf_{\phi\in\mathcal{G}_\omega} \|u(t) - \phi\|_{H^1} < \epsilon.$$

则说驻波 $u(x, t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\phi_\omega(x, y)$ 是稳定的, 否则 u_ω 就是不稳定的.

注 由第 2 章局部存在唯一性定理知, 对任何 $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^2)$, 存在 $T > 0$ 和以 u_0 为初值方程 (3.6.2) 的唯一解 $u(\cdot) \in C([0, T); H^1(\mathbf{R}^2))$, 而且对所有 $t \in [0, T)$,

$$|u(t)|_2 = |u_0|_2, \tag{3.6.29}$$

$$\mathcal{E}(u(t)) = \mathcal{E}(u_0), \tag{3.6.30}$$

其中

$$\mathcal{E}(v) = \frac{1}{2}|\nabla v|_2^2 - \frac{a}{4}|v|_4^4 - \frac{b}{4}\int |v|^2E_1(|v|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

定理 3.6.5 设 (H) 假设成立, 记 $d(\omega)=S_\omega(\phi_\omega), 0<\omega<\infty$. 如果 $d''(\omega_0)>0$, 则 ϕ_{ω_0} 是稳定的.

定理 3.6.5 的证明需要几个引理. 首先, 我们在空间 $H^1(\mathbf{R}^2)$ 上定义泛函

$$P_\omega(v)=-V_\omega(v).$$

注意到

$$S_\omega(v)=\frac{1}{2}T(v)-V_\omega(v)=\varepsilon(v)+\frac{\omega}{2}|v|_2^2, \tag{3.6.31}$$

$$P_\omega(v)=S_\omega(v)-\frac{1}{2}T(v). \tag{3.6.32}$$

引理 3.6.6 下面结论成立:

1) 对所有的 $\psi\in\mathcal{X}$, 有 $P_\omega(\psi)=0$.

2) $d(\omega)=\frac{1}{2}T(\phi_\omega)=\inf\left\{\frac{1}{2}T(\psi):\psi\in H^1(\mathbf{R}^2),\psi\neq 0,V_\omega(\psi)\geqslant 0\right\}$;

3) $d'(\omega)=\frac{1}{2}|\phi_\omega|_2^2$;

4) $d(\omega)=\inf\left\{\frac{1}{2}T(\psi):\psi\in H^1(\mathbf{R}^2),\psi\leqslant 0,P_\omega(\psi)\neq 0\right\}$.

证明 对于 $\lambda>0$, 我们定义 $\psi^\lambda(x,y)=\psi(x/\lambda,y/\lambda)$.

1) 取 $\psi\in\mathcal{X}$, 则我们有

$$P_\omega(\psi)=\frac{1}{2}\partial_\lambda S_\omega(\psi^\lambda)|_{\lambda=1}=\frac{1}{2}\langle S_\omega'(\psi),\ \ \partial_\lambda\psi^\lambda\rangle=0.$$

2) 由引理 3.6.4 立刻推得结论.

3) 由于 $S_\omega(\phi_\omega)=\mathcal{E}+\frac{\omega}{2}|\phi_\omega|_2^2$, 我们有

$$d'(\omega)=\langle S_\omega'(\phi_\omega),\ \ \partial_\omega\phi^\omega\rangle+\frac{1}{2}|\phi_\omega|_2^2=\frac{1}{2}|\phi_\omega|_2^2.$$

4) 置

$$\tilde{d}(\omega)=\inf\left\{\frac{1}{2}T(\psi):\psi\in H^1(\mathbf{R}^2),\psi\neq 0,P_\omega(\psi)\leqslant 0\right\}.$$

由 1) 知 $\tilde{d}(\omega)\leqslant\frac{1}{2}T(\phi_\omega)=d(\omega)$. 反之, 对于 $\psi\in H^1(\mathbf{R}^2)$, $\psi\neq 0$, $P_\omega(\psi)\leqslant 0$, 令 $\lambda=(T(\phi_\omega)/T(\psi))^{1/2}$, 则我们有

$$V_\omega(\psi^\lambda)=\lambda^2V_\omega(\psi)\geqslant 0.$$

从 2) 我们有

$$d(\omega)\leqslant\frac{1}{2}T(\psi^\lambda)=\frac{1}{2}T(\psi).$$

这推出 $d(\omega)\leqslant\frac{1}{2}T(\psi)$. 因此有 $d(\omega)\leqslant\tilde{d}(\omega)$.

引理 3.6.7 集合

$$\mathcal{A}_\omega^+ = \{v \in H^1(\mathbf{R}^2) : S_\omega(v) < d(\omega), P_\omega(v) > 0\}$$
$$= \left\{v \in H^1(\mathbf{R}^2) : S_\omega(v) < d(\omega), \frac{1}{2}T(v) < d(\omega), v \neq 0\right\},$$

$$\mathcal{A}_\omega^- = \{v \in H^1(\mathbf{R}^2) : S_\omega(v) < d(\omega), P_\omega(v) < 0\}$$
$$= \left\{v \in H^1(\mathbf{R}^2) : S_\omega(v) < d(\omega), \frac{1}{2}T(v) > d(\omega), v \neq 0\right\},$$

在式 (3.6.2) 的流作用下是不变区域.

证明 令 $u_0 \in \mathcal{A}_\omega^\pm, u(t)$ 是以 $u(0) = u_0$ 方程 (3.6.2) 的解, 于是由式 (3.6.29), 式 (3.6.30), 我们有 $S_\omega(u(t)) = S_\omega(u_0) < d(\omega)$. 因此由式 (3.6.32) 和引理 3.6.6 中的 4), 我们有 $P_\omega(u(t)) \neq 0$. 由于 $P_\omega(u(t))$ 是 t 的连续函数, 我们有: 如果 $u_0 \in \mathcal{A}_\omega^+$, 则有 $P_\omega(u(t)) > 0$. 而如果 $u_0 \in \mathcal{A}_\omega^-$, 则有 $P_\omega(u(t)) < 0$. 这表明集合 $\mathcal{A}_\omega^\pm$ 在式 (3.6.2) 流作用下是不变的.

引理 3.6.8 如果 $d''(\omega) > 0$, 则存在具有如下性质的 $\epsilon > 0$: 对任何 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, 存在 $\delta > 0$, 使得如果 $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^2), \|u_0 - \phi_{\omega_0}\|_{H^1} < \delta$ 和 $u(t)$ 是式 (3.6.2) $u(0) = u_0$ 的解, 则对所有的 $t \geqslant 0$, 有 $d(\omega_0 - \epsilon) < 1/2T(u(t)) < d(\omega_0 + \epsilon)$.

证明 固定 $\epsilon > 0$ 并令 $\omega_+ = \omega_0 + \epsilon, \omega_- = \omega_0 - \epsilon$. 由引理 3.6.6 中的 3) 推得 $d(\omega_-) < d(\omega_0) < d(\omega_+)$. 因此, 由于 $d(\omega_0) = 1/2T(\phi_{\omega_0}) = 1/2T(u_0) + O(\delta)$, 如果我们取 δ 充分小, 我们得到 $d(\omega_-) < 1/2T(u_0) < d(\omega_+)$. 由引理 3.6.7, 为了完成证明, 只需要证明 $S_{\omega_\pm}(u_0) < d(\omega_\pm)$. 事实上,

$$S_{\omega_\pm}(u_0) = S_{\omega_\pm}(\phi_{\omega_0}) + O(\delta) = S_{\omega_0}(\phi_{\omega_0}) \pm \frac{\epsilon}{2}|\phi_{\omega_0}|_2^2 + O(\delta)$$

$$= d(\omega_0) + (\omega_\pm - \omega_0)d'(\omega_0) + O(\delta).$$

这里我们已利用 $d(\omega)$ 的定义和引理 3.6.6 中的 3). 另一方面, 在 ω_0 的 Taylor 展开式给出:

$$d(\omega_\pm) = d(\omega_0) + (\omega_\pm - \omega_0)d'(\omega_0) + \frac{1}{2}(\omega_\pm - \omega_0)^2 d''(\omega_1),$$

其中, ω_1 是 ω_0 和 $\omega_\pm$ 之间的一个数. 由假设 $d''(\omega_0) > 0$, 如果 ϵ 充分小, 我们有 $d''(\omega_1) > 0$. 因此, 如果取 δ 充分小, 我们有 $S_{\omega_\pm}(u_0) < d(\omega_\pm)$.

引理 3.6.9 设 (H) 条件成立 $\{v_k\} \subset H^1(\mathbf{R}^2)$ 是满足如下条件的序列:

$$\frac{1}{2}T(v_k) \to d(\omega), \tag{3.6.33}$$

$$S_\omega(v_k) \to S_\omega(\phi_\omega), \tag{3.6.34}$$

$$|v_k|_2 \to |\phi_\omega|_2, \tag{3.6.35}$$

则存在 $\{y_k\} \subset \mathbf{R}^2$ 使得 $\{\tau_{y_k} v_k\}$ 有一个子序列 $\{\tau_{y_{k'}} v_{k'}\}$ 在 $H^1(\mathbf{R}^2)$ 中对某个 $\phi \in \mathcal{G}_\omega$ 有

$$\tau_{y_{k'}} v_{k'} \to \phi.$$

注 由式 (3.6.33) 和式 (3.6.34), 我们有 $V_\omega(v_k) \to \mu_\omega$ 和 $P_\omega(v_k) \to 0$. 因此, $\{v_k\}$ 是在引理 3.6.6 的 2) 和 4) 中极小化问题的一个极小化序列.

引理 3.6.9 的证明如下.

由设式 (3.6.33) 和式 (3.6.34), 用证明定理 3.6.1 同样的途径我们可以证明存在 $\{y_k\} \subset \mathbf{R}^2$ 使得在 $H^1(\mathbf{R}^2)$ 中有

$$\tau_{y_{k'}} v_{k'} \to \phi, \tag{3.6.36}$$

其中, ϕ 是引理 3.6.6 中的 2) 中极小化问题的一个极小. 利用与定理 3.6.1 证明中第二步同样的方法可以证明对于式 (3.6.36) 中的 ϕ, 存在 $\lambda > 0$, 使得 $\phi^\lambda \in \mathcal{G}_\omega$, 其中 $\phi^\lambda(x, y) = \phi(x/\lambda, y/\lambda)$. 从式 (3.6.35) 和式 (3.6.36) 以及 ϕ^λ 的定义, 我们有

$$|\phi^\lambda|_2 = \lambda|\phi|_2 = \lambda|\phi_\omega|_2, \tag{3.6.37}$$

另一方面, 由假设 (H), 我们有

$$|\phi^\lambda|_2 = |\phi_\omega|_2. \tag{3.6.38}$$

从式 (3.6.37) 和式 (3.6.38) 我们有 $\lambda = 1$. 因此 $\phi \in \mathcal{G}_\omega$. 证明完成.

定理 3.6.5 的证明如下.

我们用反证法证明. 假如 ϕ_{ω_0} 是不稳定, 存在一个初值序列 $u_k(0)$ 和 $\epsilon_0 > 0$ 使得在 $H^1(\mathbf{R}^2)$ 中

$$u_k(0) \to \phi_{\omega_0},$$

$$\sup_{0 \leqslant t < \infty} \inf_{\phi \in \mathcal{G}_{\omega_0}} \|u_k(t) - \phi\|_{H^1} \geqslant \epsilon_0,$$

其中, $u_k(t)$ 是以 $u_k(0)$ 为初始值的一个解, 由关于 t 的连续性, 我们可以选择第一时间 $t_k > 0$, 使得

$$\inf_{\phi \in \mathcal{G}_{\omega_0}} \|u_k(t_k) - \phi\|_{H^1} = \epsilon_0, \tag{3.6.39}$$

并且解 u_k 至少在区间 $[0, t_k]$ 上存在, 由守恒律式 (3.6.29) 和式 (3.6.30),

$$S_{\omega_0}(u_k(t_k)) = S_{\omega_0}(u_k(0)) \to S_{\omega_0}(\phi_{\omega_0}),$$

$$|u_k(t_k)|_2 = |u_k(0)|_2 \to |\phi_{\omega_0}|_2.$$

此外, 由引理 3.6.8, 我们有

$$\frac{1}{2}T(u_k(t_k)) \to d(\omega_0).$$

因此, 由引理 3.6.9, 存在 $\{y_k\} \subset \mathbf{R}^2$ 和它的子序列 (我们仍记为 $\{\tau_{y_k} u_k(t_k)\}$) 使得在 $H^1(\mathbf{R}^2)$ 中对某个 $\phi_0 \in \mathcal{G}_{\omega_0}$ 有

$$\tau_{y_k} u_k(t_k) \to \phi_0.$$

这矛盾于式 (3.6.39). 因此 ϕ_{ω_0} 是稳定的, 证毕.

定理 3.6.10 设 $-a < b, \phi \in \mathcal{X}_\omega$, 则 $u(t,x,y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\phi(x,y)$ 是方程 (3.6.2) 的整体解在如下意义下是不稳定的: 存在 $\{\phi_n\} \subset H^1$ 使得当 $n \to \infty$ 时在 H^1 中 $\phi_n \to \phi$, 而 $U(t)\phi_n$ 在有限时刻爆破.

证明 由于 $\phi \in \mathcal{X}_\omega$, 我们有 $\mathcal{E}(\phi) = 0$. 因此对所有的 $\lambda > 1, \mathcal{E}(\lambda\phi) < 0$. 令 $\phi_n = \lambda_n \phi$, 其中 $\lambda_n > 1, \lambda_n \downarrow 1$ 我们考虑 $u_n(t) = U(t)\phi_n$, 其中, $U(t)\phi_n$ 表示以 ϕ_n 为始值的方程 (3.6.2) 的极大解. 由定理 3.6.1, $|\cdot|\phi \in L^2$, 这推出函数 $I_n(t) = \displaystyle\int (x^2+y^2)|u_n(t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是有确切定义的, 而且由第 2 章 (Ghidaglia J M et al. 1990) 关于椭圆 - 椭圆型 DS 方程始值问题的定理 3.2, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} I_n(t) = 16\mathcal{E}(u_n(t)).$$

但是, 由能量守恒, $\mathcal{E}(u_n(t)) = \mathcal{E}(\phi_n) < 0$, 类似于第 2 章关于椭圆 - 椭圆型 DS 方程始值问题的结论, 利用能量方法即可证明解的存在时间是有限的, 证明完成.

第 4 章　同宿筒与异宿筒

同宿轨和异宿轨的概念是在湍流和混沌现象的研究中提出的. 一方面, 它与湍流相干结构的一种 —— 孤立波相联系, 又和非孤立波相干结构 —— 涡旋有关, 另一方面, 同宿异宿轨道横截相交, 是出现混沌的必要条件. 因此, 对同宿异宿轨的研究有助于分析动力系统解的结构性质.

本章我们研究 DS 方程同宿异宿轨及其相关性质 (Z Dai et al. 2007, Z Dai et al. 2005, Y Li et al. 2000).

4.1　同宿筒与异宿筒的基本概念

定义 4.1.1 (Temam　1988)　$S(t)$ 是定义在 Hilbert 空间 H 上的半群算子. 若存在点 $u_0 \in H$, 满足 $S(t)u_0 = u_0$, $\forall t \geqslant 0$, 称 u_0 为不动点或平衡点.

定义 4.1.2 (Temam　1988)　不动点 u_0 的稳定流形 $\mathcal{M}_-(u_0)$ 是包含在一个完全轨 $\{u(t), t \in \mathbf{R}\}$ 的点集 u_*, $u_* = u(t_0)$, 使得

$$u(t) = S(t - t_0)u_* \to u_0, \qquad \text{当} t \to \infty.$$

不动点 u_0 的不稳定流形 $\mathcal{M}_+(u_0)$ 是包含在一个完全轨 $\{u(t), t \in \mathbf{R}\}$ 的点集 u_*, $u_* = u(t_0)$, 使得

$$u(t) \to u_0, \qquad \text{当} t \to -\infty.$$

定义 4.1.3 (Temam　1988)　若有一条曲线 Q 从不动点 u_* 的不稳定流形到另一个不动点 u_{**} 的稳定流形, 当 $u_* \neq u_{**}$ 时, 称该曲线为异宿轨, 否则称为同宿轨.

定义 4.1.4　若同宿 (异宿) 轨 Q 对于空间变量是周期的, 称 Q 为同宿 (异宿) 筒.

4.2　(+, −) 型 DS 方程的同宿筒和异宿筒

考虑 Davey-Stewartson I 方程 (DSI):

$$\begin{cases} \mathrm{i}q_t + q_{xx} + q_{yy} = -|q|^2 q + q\varphi, \\ \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 2(|q|^2)_{xx} \end{cases} \tag{4.2.1}$$

及其边界条件

$$q(x,y,t)=q(x+l_1,y+l_2,t) \ \ \varphi(x,y,t)=\varphi(x+l_1,y+l_2,t) \tag{4.2.2}$$

和偶约束条件

$$q(-x,-y)=q(x,y), \qquad \varphi(-x,-y)=\varphi(x,y), \qquad x,y\in\Omega, \tag{4.2.3}$$

其中 $q:\mathbf{R}_x\times\mathbf{R}_y\times\mathbf{R}_t^+\longrightarrow C$ 和 $\varphi:\mathbf{R}_x\times\mathbf{R}_y\times\mathbf{R}_t^+\to\mathbf{R}$.

我们从一个不动环上的任意点出发, 首先证明 DSI 方程 (4.2.1)~(4.2.3) 同宿异宿筒的存在, 再利用 Hirota 方法和空间变量的双周期性, 得到 DSI 方程 (4.2.1)~(4.2.3) 在周期边界条件和偶约束下同宿筒和异宿筒的精确表达, 借助于相平面分析, 进一步研究同宿异宿解的结构.

4.2.1 不动点和不动环的双曲分析

首先, 我们研究 DSI 方程不动点的性质, 其次考虑 DSI 方程不动环的性质.

容易证明 $(a_0+\mathrm{i}b_0,a_0^2+b_0^2)$ 是一个不动点, 其中 a_0 和 b_0 是任意实数. 明显地, 对任意复数 $z\in\mathbf{C}$, 如果 z 满足 $|z|^2=1$, 则 $((a_0+\mathrm{i}b_0)z,a_0^2+b_0^2)$ 也是一个不动点.

设 $q=(a_0+\mathrm{i}b_0)q_0,\varphi=a_0^2+b_0^2+\varphi_0$, 我们把 q_0,φ_0 分别记为 q,φ. 方程 (4.2.1) 可以写成

$$\begin{cases} \mathrm{i}q_t+q_{xx}+q_{yy}=-(a_0^2+b_0^2)(|q|^2-1)q+q\varphi, \\ \varphi_{xx}-\varphi_{yy}=2(a_0^2+b_0^2)(|q|^2)_{xx}. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

于是 $(1,0)$ 是该方程的一个不动点.

令 $q=q_1+\mathrm{i}q_2$, 则

$$\begin{cases} q_{1t}+q_{2xx}+q_{2yy}+(a_0^2+b_0^2)(|q|^2-1)q_2-q_2\varphi=0, \\ q_{2t}-q_{1xx}-q_{1yy}-(a_0^2+b_0^2)(|q|^2-1)q_1+q_1\varphi=0, \\ \varphi_{xx}-\varphi_{yy}=(a_0^2+b_0^2)(2|q|^2)_{xx}. \end{cases}$$

在点 $(1,0)$ 处将系统线性化, 并求解 (q,φ) 的特征值方程. 这里我们只考虑分别在 x 方向 (或 y 方向) 只有一个波数 $k_1(k_2)$ 的简单情形. 在这种情形下, 在不动点 $(1,0)$ 附近, q 和 φ 是谱算子 $(\partial_{xx},\partial_{yy})$ 的特征值, 且有如下形式

$$\begin{aligned} -\partial_{xx}q_i&=k_1^2q_i, & -\partial_{yy}q_i&=k_2^2q_i \qquad (i=1,2), \\ -\partial_{xx}\varphi&=k_1^2\varphi, & -\partial_{yy}\varphi&=k_2^2\varphi. \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

于是有

$$\begin{cases} q_{1t}-k_1^2q_2-k_2^2q_2=0, \\ q_{2t}+k_1^2q_1+k_2^2q_1-(a_0^2+b_0^2)(2q_1)+\varphi=0, \\ k_2^2\varphi-k_1^2\varphi=(a_0^2+b_0^2)(4q_{1xx}). \end{cases}$$

由上式第三个方程解出 $\varphi=\dfrac{4k_1^2q_1(a_0^2+b_0^2)}{k_1^2-k_2^2}$ 并代入前两个方程中, 得到

$$\begin{cases} q_{1t}=k_1^2q_2+k_2^2q_2, \\ q_{2t}=-k_1^2q_1-k_2^2q_1-\dfrac{4k_1^2(a_0^2+b_0^2)}{k_1^2-k_2^2}q_1+2(a_0^2+b_0^2)q_1. \end{cases}$$

于是, 该方程对应的特征值矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & k_1^2+k_2^2 \\ -k_1^2-k_2^2+2(a_0^2+b_0^2)-\dfrac{4k_1^2(a_0^2+b_0^2)}{k_1^2-k_2^2} & 0 \end{pmatrix}$$

特征值是

$$\lambda^2=-\left(k_1^2+k_2^2-2(a_0^2+b_0^2)+\frac{4(a_0^2+b_0^2)k_1^2}{k_1^2-k_2^2}\right)(k_1^2+k_2^2). \tag{4.2.6}$$

设 $k_1^2=Kk_2^2(K>1)$. 为保证 $\lambda^2>0$, 必须

$$0<k_1^2<\frac{2(a_0^2+b_0^2)}{K^2-1}, \tag{4.2.7}$$

因 $K>1$, 式 (4.2.7) 为真, 于是

$$\lambda=\pm\sqrt{-\left[k_1^2+k_2^2-2(a_0^2+b_0^2)+\frac{4(a_0^2+b_0^2)k_1^2}{k_1^2-k_2^2}\right](k_1^2+k_2^2)}.$$

可见 $(a_0+\mathrm{i}b_0,a_0^2+b_0^2)$ 是一个鞍点型不动点.

不动环是不动点在高维空间中的推广. 在下面的讨论中, 我们可以看到, DSI 方程的不动环同样具有双曲性.

显然, $(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t},0)$ 是 DSI 方程 (4.2.1) 的一个不动环, 其中 a 为任意正数. 令 $q=q_1+\mathrm{i}q_2$, 方程 (4.2.1) 变为

$$\begin{aligned} &q_{1t}+q_{2xx}+q_{2yy}+q_1^2q_2+q_2^3-q_2\varphi=0,\\ &q_{2t}-q_{1xx}-q_{1yy}-q_1q_2^2-q_1^3+q_1\varphi=0,\\ &\varphi_{xx}-\varphi_{yy}=4q_{1x}^2+4q_1q_{1xx}+4q_{2x}^2+4q_2q_{2xx}. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

在环 $(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t},0)$ 处线性化, 得到

$$\begin{aligned} &Q_{1t}-k_1^2Q_2-k_2^2Q_2+2q_1Q_1q_2+q_1^2Q_2+3q_2^2Q_2-Q_2\varphi-q_2\varphi=0,\\ &Q_{2t}+k_1^2Q_1+K_2^2Q_1-3q_1^2Q_1-Q_1q_2^2-2q_2q_1Q_2+Q_1\varphi+q_1\varphi=0,\\ &k_2^2\varphi-k_1^2\varphi=8q_{1x}Q_{1x}+4Q_1q_{1xx}+4q_1Q_{1xx}+8q_{2x}Q_{2x}+4Q_2q_{2xx}+4q_2Q_{2xx}. \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

这里我们同样只考虑分别在 x 方向 (或 y 方向) 只有一个波数 $k_1(k_2)$ 的简单情形. q 和 φ 是谱算子 $(\partial_{xx}, \partial_{yy})$ 的特征值, 表达式同式 (4.2.5).

将 $\varphi = (-4k_1^2Q_1q_1 - 4k_1^2Q_2q_2)/(k_2^2 - k_1^2)$ 代入式 (4.2.9) 中, 得

$$\begin{aligned}
Q_{1t} =& (k_1^2 + k_2^2 - a^2 - 2a^2\sin^2 a^2t)Q_2 + \frac{4k_1^2a^2\sin^2 a^2t}{k_1^2 - k_2^2}Q_2\\
&-2a^2\sin a^2t\cos a^2tQ_1 + \frac{4k_1^2a^2\sin a^2t\cos a^2t}{k_1^2 - k_2^2}Q_1,\\
Q_{2t} =& -(k_1^2 + k_2^2 - a^2 - 2a^2\cos^2 a^2t)Q_1 - \frac{4k_1^2a^2\cos^2 a^2t}{k_1^2 - k_2^2}Q_1\\
&+2a^2\sin a^2t\cos a^2tQ_2 - \frac{4k_1^2a^2\sin a^2t\cos a^2t}{k_1^1 - k_2^2}Q_2.
\end{aligned}$$

对应特征矩阵的特征值是

$$\lambda^2 = (k_1^2 + k_2^2 - a^2)(k_2^4 - k_1^4 - 3a^2k_2^2 - a^2k_1^2). \tag{4.2.10}$$

设 $k_1 = kk_2(0 < k < 1)$, 式 (4.2.10) 变成

$$\lambda^2 = [(k^2+1)k_2^2 - a^2][(1-k^4)k_2^2 - 3a^2 - a^2k^2].$$

为保证 $\lambda^2 > 0$, 必须

$$k_2^2 < \frac{a^2}{k^2+1}, \qquad k_2^2 < \frac{a^2(k^2+3)}{1-k^4}.$$

因 $0 < k < 1$, 于是有 $k_2^2 < \dfrac{a^2}{k^2+1}$.

令 $k_2 = p_2n$ (n 是一个正整数), 得到 $n^2 < \dfrac{a^2}{(k^2+1)p_2^2}$. 特别地, 当 $p_2 = 1$ 时, 记 N 为 n 的最大模数, 我们有

$$0 < N^2 < \frac{a^2}{k^2+1}.$$

因此, 当 $0 < N < \dfrac{|a|}{\sqrt{k^2+1}}$ 时, 不动环 $(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t}, 0)$ 是双曲的.

4.2.2 线性稳定性分析

我们利用一个小扰动研究不动点和不动环的稳定性. 令

$$\begin{cases} q = r(1 + Q_\varepsilon(x,y,t)),\\ \varphi = |r|^2(1 + \varphi_\varepsilon(x,y,t)), \end{cases} \tag{4.2.11}$$

其中, $|Q_\varepsilon(x,y,t)| \ll 1$, $|\varphi_\varepsilon(x,y,t)| \ll 1$ 以及 $r = a_0 + \mathrm{i}b_0$.

将式 (4.2.11) 代入式 (4.2.1), 取线性部分得到

$$\begin{cases} \mathrm{i}Q_{\varepsilon t} + Q_{\varepsilon xx} + Q_{\varepsilon yy} = -|r|^2(Q_\varepsilon + Q_\varepsilon^*) + |r|^2\varphi_\varepsilon), \\ \varphi_{\varepsilon xx} - \varphi_{\varepsilon yy} = 2(Q_{\varepsilon xx} + Q_{\varepsilon xx}^*), \end{cases} \tag{4.2.12}$$

其中, $*$ 指共轭. 我们寻找如下形式的解

$$\begin{cases} Q_\varepsilon = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu_n x + \bar{\mu}_n y) + \sigma_n t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mu_n x + \bar{\mu}_n y) + \sigma_n t}, \\ \varphi_\varepsilon = C(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu_n x + \bar{\mu}_n y) + \sigma_n t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mu_n x + \bar{\mu}_n y) + \sigma_n t}), \end{cases} \tag{4.2.13}$$

其中, A 和 B 是复常数; C 是实数; $\mu = p_1 n; \bar{\mu}_n = p_2 n; p_2 = kp_1, k > 1; \sigma_n$ 为 n 阶模增长速度.

将式 (4.2.13) 代入式 (4.2.12), 得

$$\sigma_n^2 = 2|r|^2(\mu_n^2 + \bar{\mu}_n^2) - (\mu_n^2 + \bar{\mu}_n^2)^2 = (2|r|^2 - \mu_n^2 - \bar{\mu}_n^2)(\mu_n^2 + \bar{\mu}_n^2).$$

为保证 $\sigma_n^2 > 0$, 有

$$\mu_n^2 + \bar{\mu}_n^2 = (1 + k^2)\mu_n^2 < 2|r|^2,$$

即 $\mu_n^2 < \dfrac{2|r|^2}{1+k^2}$, 即 $0 < n < \dfrac{\sqrt{2}|r|}{p_1\sqrt{1+k^2}}$.

于是, 确定异宿轨结构复杂性的不稳定模数, 可以通过满足下列条件的最大整数 N 得到

$$0 < N < \frac{\sqrt{2}|a|}{\sqrt{1+k^2}p_1}.$$

同样我们考虑在下列形式的扰动下不动环 $(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2 t}, 0)$ 的线性稳定性

$$q = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2 t}(1 + Q_\varepsilon(x,y,t)), \qquad \varphi = \varphi_\varepsilon(x,y,t). \tag{4.2.14}$$

将式 (4.2.14) 代入到式 (4.2.1) 中并取线性部分, 得

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}Q_{\varepsilon t} + Q_{\varepsilon xx} + Q_{\varepsilon yy} = -a^2 Q - a^2 Q^* + \varphi, \\ &\varphi_{\varepsilon xx} - \varphi_{\varepsilon yy} = 2a^2 Q_{\varepsilon xx} + 2a^2 Q_{\varepsilon xx}^*. \end{aligned}$$

我们同样寻找具有形式 (4.2.13) 的解. 将式 (4.2.13) 代入上式, 得

$$\sigma_n^2 = a^4 - (a^2 - \mu_n^2 - \bar{\mu}_n^2) = (\mu_n^2 + \bar{\mu}_n^2)(2a^2 - \mu_n^2 - \bar{\mu}_n^2).$$

从而有 $n^2 < \dfrac{2a^2}{(1+k_3^2)p_2^2}$, 其中 $k_3 = p_1/p_2$. 因此, 确定同宿轨结构复杂性的不稳定模数, 可以通过满足下式的最大整数 N 得到

$$0 < N < \frac{\sqrt{2}|a|}{|p_2|\sqrt{1+k_3^2}}.$$

4.2.3 DSI 方程同宿异宿简解的精确表示

利用 Hirota 方法, 我们可以得到 DSI 方程精确的同宿异宿简解.

首先, 我们考虑同宿简解.

将 $q = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t}Q(x,y,t)$ 代入方程 (4.2.1) 中, 得

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = -a^2(|Q|^2 - 1)Q + Q\varphi, \\ &\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2a^2\frac{\partial^2(|Q|^2)}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

设

$$Q = \frac{G}{F}, \qquad \varphi = -4(\ln F)_{xx},$$

其中, G 是复函数而 F 是实函数. 设 G, F 具有如下形式

$$\begin{cases} G = 1 + b_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+\mathrm{i}p_2y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}p_2y})\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma} + b_2\mathrm{e}^{2\Omega t+2\gamma}, \\ F = 1 + b_3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+\mathrm{i}p_2y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}p_2y})\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma} + b_4\mathrm{e}^{2\Omega t+2\gamma}, \end{cases} \tag{4.2.16}$$

这里, b_1, b_2 是复常数, b_3, b_4, Ω, γ 为实数.

将式 (4.2.16) 代入式 (4.2.15) 中, 得到如下系数的关系式

$$b_1 = \frac{\mathrm{i}\Omega + p_1^2 + p_2^2}{\mathrm{i}\Omega - p_1^2 - p_2^2}b_3, \quad b_2 = \left(\frac{\mathrm{i}\Omega + p_1^2 + p_2^2}{\mathrm{i}\Omega - p_1^2 - p_2^2}\right)^2 b_4, \quad b_4 = \frac{\Omega^2 + (p_1^2 + p_2^2)^2}{\Omega^2}b_3^2,$$

$$\Omega_1 = \frac{(p_1^2 + p_2^2)\sqrt{2a^2 - p_2^2 + p_1^2}}{\sqrt{p_2^2 - p_1^2}}, \quad \Omega_2 = -\Omega_1,$$

其中, $p_1 = \dfrac{2n\pi}{l_1}, p_2 = \dfrac{2n\pi}{l_2}$. 注意到 $l_1 > l_2$, 我们有 $p_1 < p_2$.

因 $\Omega_{1,2}$ 是实常数, 我们有 $\dfrac{2a^2 - p_2^2 + p_1^2}{p_2^2 - p_1^2} > 0$. 得到 $p_2 < \dfrac{\sqrt{2}|a|}{\sqrt{(1-k^2)}}$, 其中 $p_1 = kp_2, k = \dfrac{l_2}{l_1} < 1$, 即

$$p_2 < \frac{\sqrt{2}|a|l_1}{2\sqrt{l_1^2 - l_2^2}}, \qquad n < \frac{\sqrt{2}|a|l_1l_2}{2\pi\sqrt{l_1^2 - l_2^2}}.$$

于是 DSI 方程有如下形式的同宿轨解

$$\begin{aligned} q_j(x,y,t) &= a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t}\frac{1 + b_1\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+\mathrm{i}p_2y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}p_2y}\right)\mathrm{e}^{\Omega_it+\gamma} + b_2\mathrm{e}^{2\Omega_it+2\gamma}}{1 + b_3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+p_2y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-p_2y}\right)\mathrm{e}^{\Omega_it+\gamma} + b_4\mathrm{e}^{2\Omega_it+2\gamma}}, \\ \phi_j(x,y,t) &= -\frac{16p_1^2b_3^2 + 4b_3p_1^2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+\mathrm{i}p_2y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}p_2y}\right)\left(\mathrm{e}^{-\Omega_jt-\gamma} + b_4\mathrm{e}^{\Omega_jt+\gamma}\right)}{\left[\mathrm{e}^{-\Omega_jt-\gamma} + b_3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+\mathrm{i}p_2y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}p_2y}\right) + b_4\mathrm{e}^{\Omega_jt+\gamma}\right]^2}, \\ &\quad j = 1, 2 \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

由式 (4.2.17) 给出的解表明轨道是分别同宿到不动环上, 即:

当 $t \to +\infty$ 时

$$(q_1,\phi_1) \to \left(\left(\frac{\mathrm{i}\Omega_1+p_1^2+p_2^2}{\mathrm{i}\Omega_1-p_1^2-p_2^2}\right)^2 a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t},0\right),\quad (q_2,\phi_2)\to(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t},0),$$

当 $t \to -\infty$ 时

$$(q_1,\phi_1)\to(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t},0),\quad (q_2,\phi_2) \to \left(\left(\frac{\mathrm{i}\Omega_1+p_1^2+p_2^2}{\mathrm{i}\Omega_1-p_1^2-p_2^2}\right)^2 a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t},0\right),$$

从而我们可以看出在同宿解 (q_1,ϕ_1) 和 (q_2,ϕ_2) 之间有一个相位差. 如果 $(q_1(x_0,y_0,t),\phi_1(x_0,y_0,t))$ 是一个同宿解, 则 $\left(q_1\left(x_0+\dfrac{\pi}{p_1},y_0+\dfrac{\pi}{p_2},t\right),\phi_1\left(x_0+\dfrac{\pi}{p_1},y_0+\dfrac{\pi}{p_2},t\right)\right)$ 也是一个同宿解. (q_1,ϕ_1) 和 (q_2,ϕ_2) 形成一个对称的同宿轨, 所有这些轨道形成了同宿简.

性质 4.2.1　对于 DSI 方程, 存在一对同宿简解同宿到不动环 $(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t},0)$ 上, 其中 a 是任意正实数.

现在我们寻求异宿简解. 类似地, 将 $q=rQ(x,y,t),\varphi=|r|^2+\phi$ 代入式 (4.2.1), 得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}Q_t+Q_{xx}+Q_{yy}=-|r|^2|Q|^2Q+|r|^2Q+Q\phi,\\&\phi_{xx}-\phi_{yy}=2|r|^2(|Q|^2)_{xx},\end{aligned}\tag{4.2.18}$$

其中, $r=a_0+\mathrm{i}b_0$. 可以看出式 (4.2.18) 与式 (4.2.15) 相同. 因此, DSI 方程的异宿简解为如下形式

$$\begin{aligned}q_k&=(a_0+\mathrm{i}b_0)\frac{1+b_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+\mathrm{i}p_2y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}p_2y})\mathrm{e}^{\Omega_kt+\gamma}+b_2\mathrm{e}^{2\Omega_kt+2\gamma}}{1+b_3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+\mathrm{i}p_2y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}p_2y})\mathrm{e}^{\Omega_kt+\gamma}+b_4\mathrm{e}^{2\Omega_kt+2\gamma}},\\ \phi_k&=(a_0^2+b_0^2)-\frac{16p_1^2b_3^2+4p_1^2b_3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+\mathrm{i}p_2y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}p_2y})(\mathrm{e}^{-\Omega_kt-\gamma}+b_4\mathrm{e}^{\Omega_kt+\gamma})}{[\mathrm{e}^{-\Omega_kt-\gamma}+b_3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+\mathrm{i}p_2y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}p_2y})+b_4\mathrm{e}^{\Omega_kt+\gamma}]^2},\\ &\quad k=1,2\end{aligned}\tag{4.2.19}$$

其中, $a,b_1,b_2,b_3,b_4,p_1,p_2,\Omega_1,\Omega_2$ 满足如下关系式:

$$b_1=\frac{\mathrm{i}\Omega+p_1^2+p_2^2}{\mathrm{i}\Omega-p_1^2-p_2^2}b_3,\quad b_2=\left(\frac{\mathrm{i}\Omega+p_1^2+p_2^2}{\mathrm{i}\Omega-p_1^2-p_2^2}\right)^2b_4,\quad b_3^2=\frac{\Omega^2}{\Omega^2+(p_1^2+p_2^2)^2}b_4,$$

$$\Omega_1=(p_1^2+p_2^2)\sqrt{\frac{p_1^2-p_2^2+2|a|^2}{p_2^2-p_1^2}},\quad \Omega_2=-\Omega_1.$$

显然, 由式 (4.2.19) 得到的解表明轨道分别异宿到环 $|q|^2=a_0^2+b_0^2$ 上的两个不同的不动点上, 即:

当 $t \to +\infty$

$$(q_1, \varphi_1) \to \left(\left(\frac{\mathrm{i}\Omega + p_1^2 + p_2^2}{\mathrm{i}\Omega - p_1^2 - p_2^2} \right)^2 (a_0 + \mathrm{i}b_0), a_0^2 + b_0^2 \right),$$

$$(q_2, \varphi_2) \to (a_0 + \mathrm{i}b_0, a_0^2 + b_0^2).$$

当 $t \to -\infty$

$$(q_1, \varphi_1) \to (a_0 + \mathrm{i}b_0, a_0^2 + b_0^2),$$

$$(q_2, \varphi_2) \to \left(\left(\frac{\mathrm{i}\Omega + p_1^2 + p_2^2}{\mathrm{i}\Omega - p_1^2 - p_2^2} \right)^2 (a_0 + \mathrm{i}b_0), a_0^2 + b_0^2 \right).$$

设

$$\left(\frac{\mathrm{i}\Omega + p_1^2 + p_2^2}{\mathrm{i}\Omega - p_1^2 - p_2^2} \right)^2 = c + d\mathrm{i},$$

则当 $c^2 + d^2 = 1$ 时, $\left(\left(\frac{i\Omega + p_1^2 + p_2^2}{\mathrm{i}\Omega - p_1^2 - p_2^2} \right)^2 (a_0 + \mathrm{i}b_0), a_0^2 + b_0^2 \right)$ 是另一个不动点. 因为 c 和 d 是任意实数, $(a_0 + \mathrm{i}b_0, a_0^2 + b_0^2)$ 与 $\left(\left(\frac{\mathrm{i}\Omega + p_1^2 + p_2^2}{\mathrm{i}\Omega - p_1^2 - p_2^2} \right)^2 (a_0 + \mathrm{i}b_0), a_0^2 + b_0^2 \right)$ 不同, 表明 DSI 方程 (4.2.1) 有异宿筒解 (4.2.19). 我们有如下性质.

性质 4.2.2 对任意复数 $r = a_0 + \mathrm{i}b_0$, 如果 r 是复平面 z 中环 $|z|^2 = a_0^2 + b_0^2$ 上的一点, 则 $(r, |r|^2)$ 是一个不动点. DSI 方程有一对异宿筒解异宿到环 $|z|^2 = a_0^2 + b_0^2$ 上两个不同的不动点上.

4.2.4 异宿解的结构

我们进一步考虑异宿解 (q_1, φ_1) 的结构, 对于 (q_2, φ_2) 结果是类似的.

设

$$\frac{\mathrm{i}\Omega_1 + p_1^2 + p_2^2}{\mathrm{i}\Omega_1 - p_1^2 - p_2^2} = \frac{(p_1^2 + p_2^2)^2 - \Omega_1^2 + 2\Omega_1(p_1^2 + p_2^2)\mathrm{i}}{-(\Omega_1^2 + (p_1^2 + p_2^2)^2)} = X + Y\mathrm{i},$$

得到

$$X = \frac{\Omega_1^2 - (p_1^2 + p_2^2)^2}{\Omega_1^2 + (p_1^2 + p_2^2)^2}, \qquad Y = -\frac{2\Omega_1(p_1^2 + p_2^2)}{\Omega_1^2 + (p_1^2 + p_2^2)^2},$$

因此

$$q_1 = (a_0 + \mathrm{i}b_0) \frac{1 + 2(X + Y\mathrm{i})b_4 \cos(p_1 x + p_2 y)\mathrm{e}^{\Omega_1 t + \gamma} + ((X + Y\mathrm{i})Z b_4 \mathrm{e}^{\Omega_1 t + \gamma})^2}{1 + 2b_4 \cos(p_1 x + p_2 y)\mathrm{e}^{\Omega_1 t + \gamma} + (Z b_4 \mathrm{e}^{\Omega_1 t + \gamma})^2},$$

其中 $Z^2 = \frac{\Omega_1^2 + (p_1^2 + p_2^2)^2}{\Omega_1^2}$. 容易看出 (q_1, φ_1) 是一个 3 维光滑曲面, 依赖于变量:

$$(x, y, t) \in \left(\frac{2n\pi}{p_1}, \frac{2(n+1)\pi}{p_1} \right) \times \left(\frac{2n\pi}{p_2}, \frac{2(n+1)\pi}{p_2} \right) \times (-\infty, +\infty),$$

$$n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2 \cdots$$

和参数空间

$$(|r|, p_1, p_2) \in R_+ \times \left(0, \sqrt{\frac{2|r|^2}{1-k^2}}\right) \times \left(0, k\sqrt{\frac{2|r|^2}{1-k^2}}\right).$$

设 $q_1 = \rho_1(x,y,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x,y,t)}$ (注意到 $X^2+Y^2=1$), 则

$$\rho_1^2 = \frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{\Gamma_3},$$

其中

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 =& (a_0^2+b_0^2)[1+4XE(t)\cos(p_1x+p_2y)+2Z^2(X^2-Y^2)E^2(t)\\
&+4\cos^2(p_1x+p_2y)E^2(t)],\\
\Gamma_2 =& (a_0^2+b_0^2)[4XZ^2E^3(t)\cos(p_1x+p_2y)+Z^4E^4(t)],\\
\Gamma_3 =& 1+4E(t)\cos(p_1x+p_2y)+2Z^2E^2(t)+4E^2(t)\cos^2(p_1x+p_2y)\\
&+4Z^2E^3(t)\cos(p_1x+p_2y)+Z^4E^4(t),\\
E(t) =& b_4\mathrm{e}^{\Omega_1t+\gamma}.
\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

取 $|t|$ 足够大, ρ_1 可以写为

$$\rho_1^2 = \begin{cases} \dfrac{|r|^2[Z^2E(t)+4X\cos(p_1x+p_2y)]+\varepsilon_1(x,y,t)}{Z^2E(t)+4\cos(p_1x+p_2y)+\varepsilon_2(x,y,t)}, & t>0, \\ \dfrac{|r|^2[1+4XE(t)\cos(p_1x+p_2y)]+\varepsilon_3(x,y,t)}{1+4E(t)\cos(p_1x+p_2y)+\varepsilon_4(x,y,t)}, & t<0, \end{cases} \tag{4.2.21}$$

其中, 当 $|t| \to \infty$, 对于任意的 x, y, 有 $|\varepsilon_i(x,y,t)| \ll 1$. (ρ_1, ρ_{1t}) 的相面图如图 4.1 所示.

由式 (4.2.21) 及 $0<X<1$, 我们得到: 当 $\cos(p_1x+p_2y)<0$ 时 $\rho_1^2 \geqslant |r|^2$, 当 $\cos(p_1x+p_2y)>0$ 时 $\rho_1^2 \leqslant |r|^2$ (图 4.2(a) 和 (b)).

再考虑曲面 $\rho_1^2=|r|^2$ 上轨道的分布. 由表达式 (4.2.20), 我们得到

$$\begin{aligned}2Z^2(X-1)\cos(p_1x+p_2y)E^2(t)+Z^2(X^2-Y^2-1)E(t)\\ +2(X-1)\cos(p_1x+p_2y)=0.\end{aligned}$$

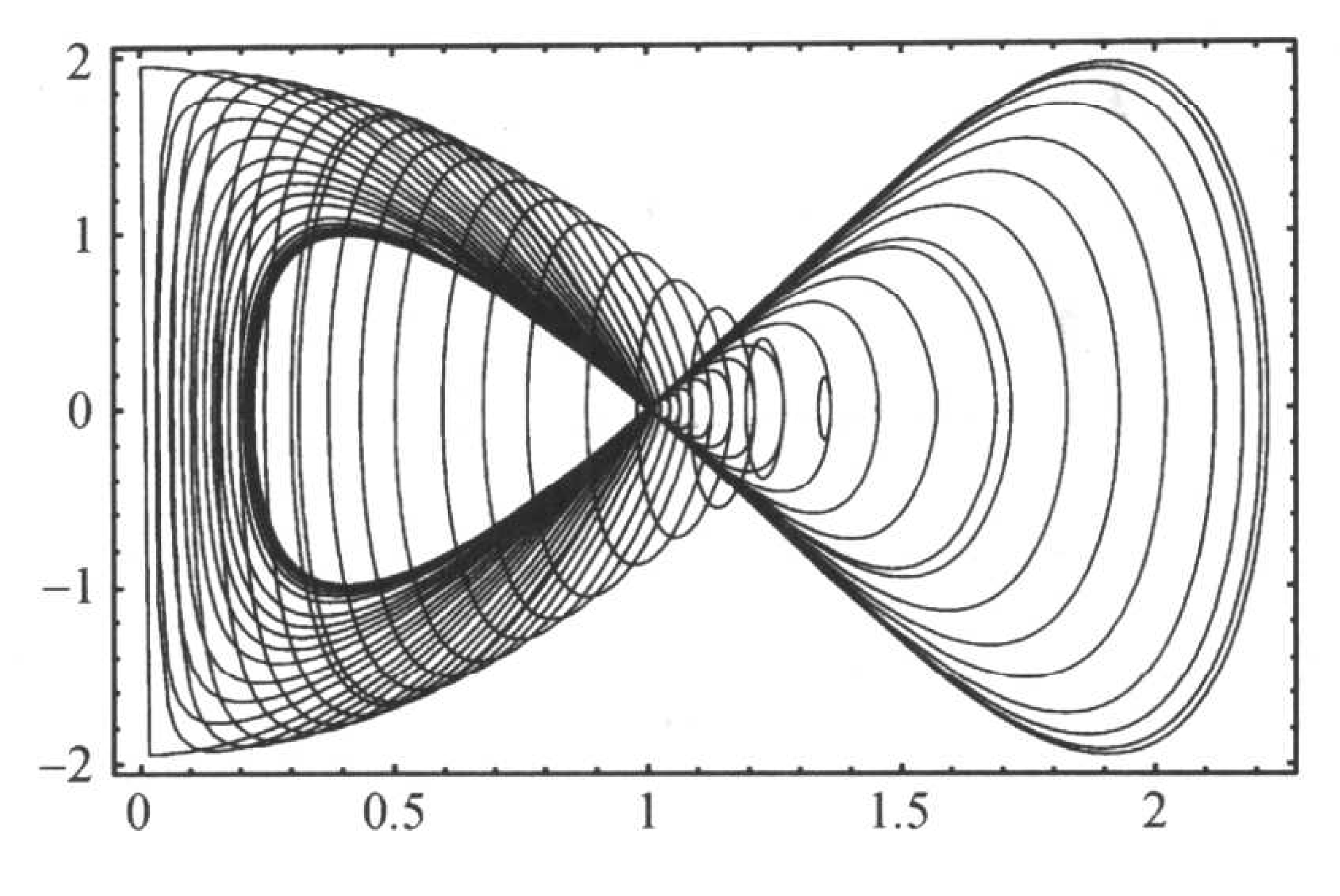
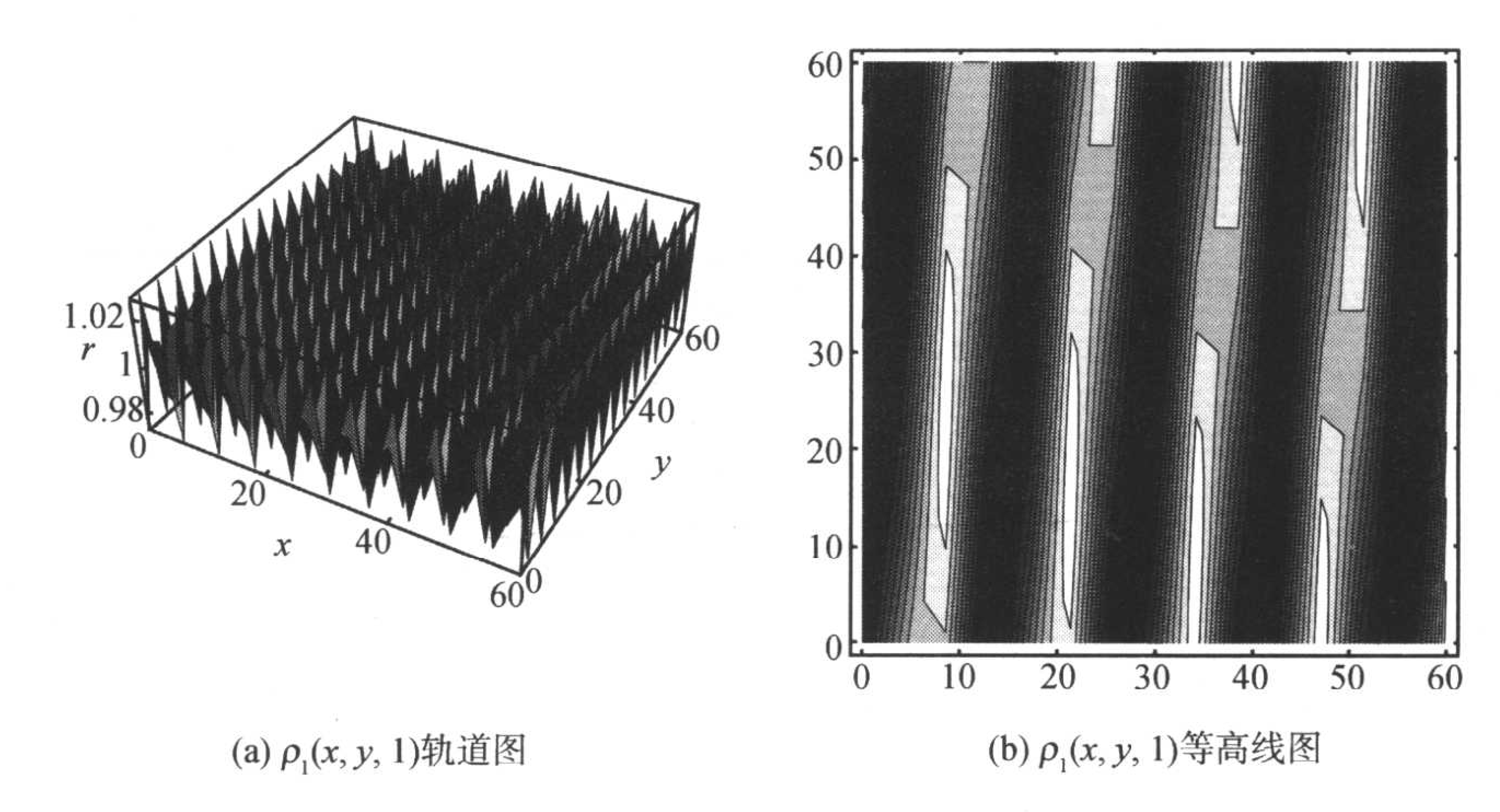


图 4.1 (ρ_1, ρ_{1t}) 相面图



(a) $\rho_1(x, y, 1)$轨道图 (b) $\rho_1(x, y, 1)$等高线图

图 4.2

把 X, Y, Z 的表达式代入方程, 得到

$$(\Omega_1^2 + (p_1^2 + p_2^2)^2)\cos(p_1x + p_2y)E^2(t) + 2\Omega_1^2 E(t) + \Omega_1^2 \cos(p_1x + p_2y) = 0. \quad (4.2.22)$$

求解式 (4.2.22), 我们有

$$E(t) = \frac{-\Omega_1^2\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{[\Omega_1^2 + (p_1^2 + p_2^2)^2]}{\Omega_1^2}\cos^2(p_1x + p_2y)}\right)}{(\Omega_1^2 + (p_1^2 + p_2^2)^2)\cos(p_1x + p_2y)}.$$

选择 $b_4 > 0$, 为得到 $E(t) > 0$, 只要 $\cos(p_1x + p_2y) < 0$, 于是

$$p_1x + p_2y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \arccos\frac{1}{Z}\right) \cup \left(\pi + \arccos\frac{1}{Z}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

当 $t > 0$, $|\cos(p_1x + p_2y)| \ll 1$, 得 $E(t) \to +\infty$. 当 $t < 0$ (且 $|t|$ 足够大), 选择

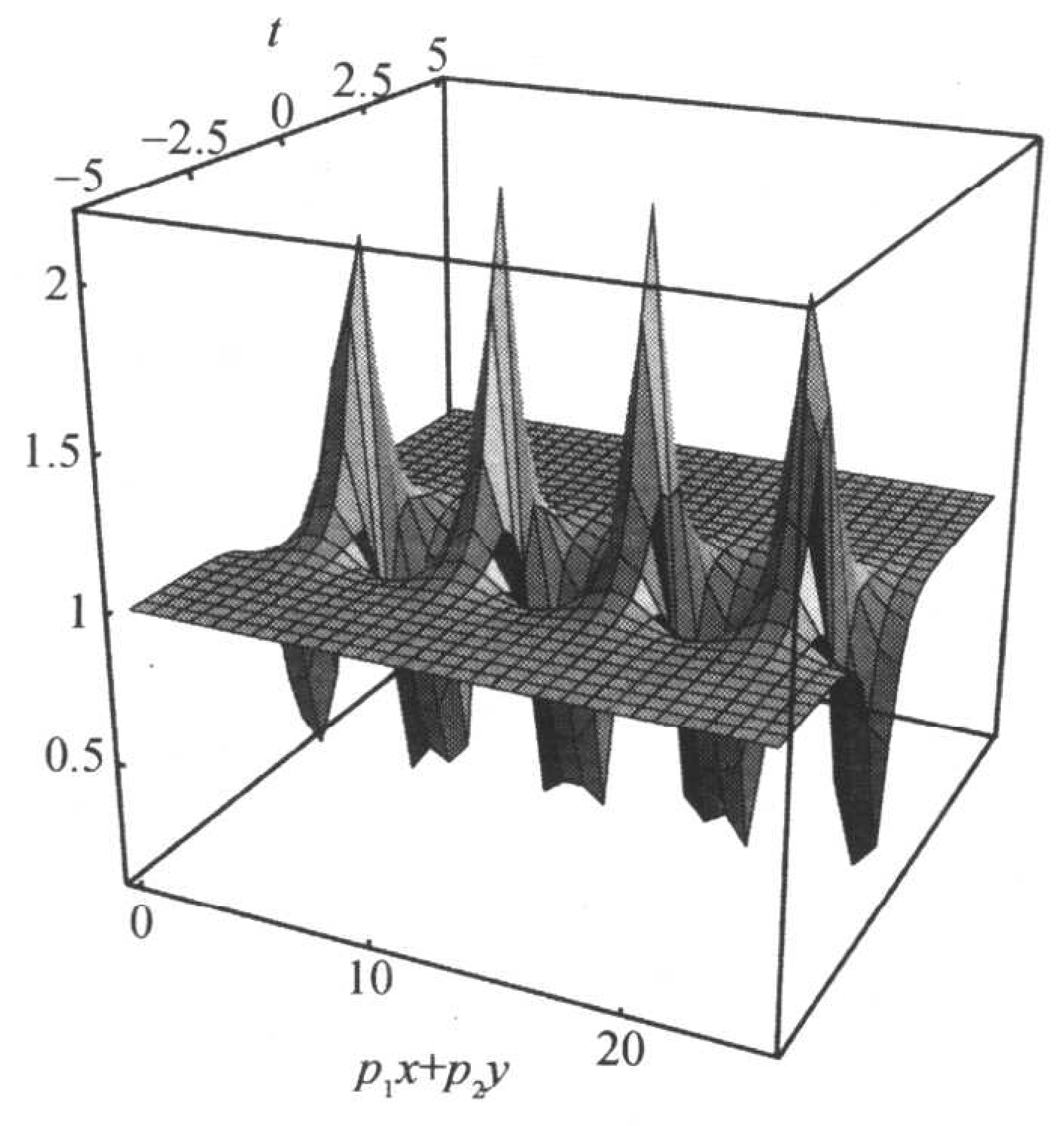
x, y 使得 $\dfrac{\sqrt{\Omega_1^2+(p_1^2+p_2^2)^2}}{\Omega_1}|\cos(p_1x+p_2y)|=\varepsilon(\varepsilon\ll 1)$, 于是

$$\begin{aligned}E(t)&=\frac{\Omega_1(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})}{\sqrt{\Omega_1^2+(p_1^2+p_2^2)^2}\varepsilon}=\frac{\Omega_1\varepsilon^2+o(\varepsilon^4)}{2\varepsilon\sqrt{\Omega_1^2+(p_1^2+p_2^2)^2}}\\&=\frac{\Omega_1\varepsilon+o(\varepsilon^3)}{2\sqrt{\Omega_1^2+(p_1^2+p_2^2)^2}}\to 0.\end{aligned}$$

从上述讨论可看出异宿流对应 (x, y) 是周期的, 且在曲面 $\rho=|r|$ 附近振荡. 注意到 $\cos(p_1x+p_2y)$ 的值和周期性, 可见当 p_1x+p_2y 从 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 变化时, t 的轨道从 $\rho_1=|r|$ 的内部进入曲相面, 直到 $p_1x+p_2y=\pi-\arccos\dfrac{1}{Z}$ 时离开, 轨道从曲相面穿出. 当 $p_1x+p_2y=\pi+\arccos\dfrac{1}{Z}$ 时, 轨道再次进入相面 $\rho_1=|r|$, 然后沿同一条路径反向离开. 并当 $p_1x+p_2y=\dfrac{3}{2}\pi$ 时, 轨道又开始穿透进入相面 $\rho_1=|r|$ 直到 $p_1x+p_2y=2\pi$ 时, 很容易地看出轨道穿出 $\rho_1=|r|$ 相面, 停留后又穿进同样的相面, 根据 p_1x+p_2y 的变化一次又一次无穷次地穿入和穿出. 因此, 当 x, y 变化时解的轨道在相面 $\rho=|a|$ 的一个小区域内一次次地穿透 (图 4.3), 最后形成一个柱面解, 我们称之为筒; 另一方面,

$$\begin{aligned}\theta(x,y,t)&=\theta_0+\arctan\frac{2YE(t)\cos(p_1x+p_2y)+2XYZ^2E^2(t)}{1+2XE(t)\cos(p_1x+p_2y)+(X^2-Y^2)Z^2E^2(t)}\\&\in\left(\theta_0-\frac{\pi}{2},\theta_0+\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

表明在不动点 (x, y) 的相空间内, 轨道在 $\theta_0-\dfrac{\pi}{2}$ 和 $\theta_0+\dfrac{\pi}{2}$ 之间前后无穷次的振荡.



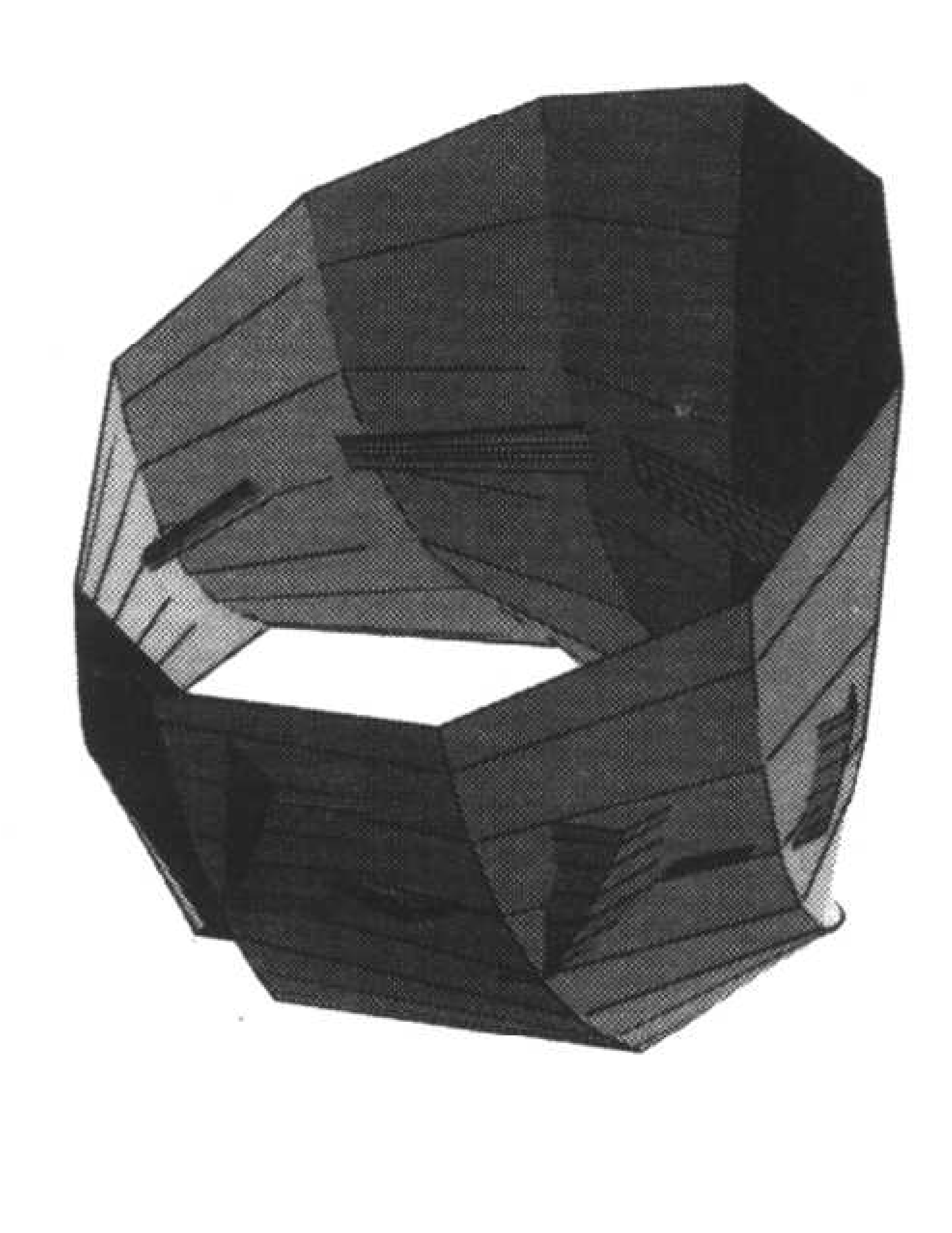


图 4.3　$\rho_1(x, y)$ 轨道穿过相面 $\rho_1=|a|$

4.3 (−,+) 型 DS 方程的同宿筒和异宿筒

DSII 方程形如

$$\begin{cases} \mathrm{i}q_t - q_{xx} + q_{yy} = -|q|^2 q + q\varphi, \\ \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 2(|q|^2)_{xx}, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

其中, $q : \mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y \times \mathbf{R}_t \longrightarrow \mathbf{C}$ 和 $\varphi : \mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y \times \mathbf{R}_t \rightarrow \mathbf{R}$.

加入边界条件

$$q(x,y,t) = q(x+l_1, y+l_2, t),$$

$$\varphi(x,y,t) = \varphi(x+l_1, y+l_2, t), \qquad l_1 > l_2, t \geqslant 0 \tag{4.3.2}$$

和偶约束

$$q(t,-x,-y) = q(t,x,y), \varphi(t,x,y) = \varphi(t,-x,-y), \qquad x,y \in \Omega. \tag{4.3.3}$$

对于 DSII 方程同宿异宿筒的研究方法与 DSI 一样, 为此我们省略关于不动点和不动环的双曲分析及稳定性分析, 直接利用 Hirota 方法给出 DSII 方程同宿异宿筒解的精确表示.

4.3.1 DSII 方程同宿异宿筒的精确表示

将 $q = aQ(x,y,t), \varphi = |a|^2 + \phi$ 代入式 (4.3.1) 得到

$$\begin{cases} \mathrm{i}Q_t - Q_{xx} + Q_{yy} = -|a|^2|Q|^2 Q + |a|^2 Q + Q\phi, \\ \phi_{xx} + \phi_{yy} = 2|a|^2(|Q|^2)_{xx}. \end{cases} \tag{4.3.4}$$

利用变量变换

$$Q = \frac{G}{F}, \qquad \phi = 4(\ln F)_{xx},$$

其中

$$\begin{cases} G = 1 + (b_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1 x + \mathrm{i}p_2 y} + b_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1 x - \mathrm{i}p_2 y})\mathrm{e}^{\Omega t + \gamma} + b_3 \mathrm{e}^{2\Omega t + 2\gamma}, \\ F = 1 + b_4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1 x + \mathrm{i}p_2 y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1 x - \mathrm{i}p_2 y})\mathrm{e}^{\Omega t + \gamma} + b_5 \mathrm{e}^{2\Omega t + 2\gamma}, \end{cases} \tag{4.3.5}$$

这里, $a, p, \Omega, \gamma, b_4, b_5$ 是实的, 而 b_1, b_2, b_3 是复数.

将式 (4.3.5) 代入式 (4.3.4) 得到这些系数的关系式

$$b_1 = b_2 = \frac{\mathrm{i}\Omega - p_1^2 + p_2^2}{\mathrm{i}\Omega + p_1^2 - p_2^2} b_4, \quad b_3 = \left(\frac{\mathrm{i}\Omega - p_1^2 + p_2^2}{\mathrm{i}\Omega + p_1^2 - p_2^2}\right)^2 b_5, \quad b_4^2 = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + (p_1^2 - p_2^2)^2} b_5,$$

$$\Omega_1 = |p_1^2 - p_2^2| \sqrt{\frac{2|a|^2 - p_1^2 - p_2^2}{p_2^2 + p_1^2}}, \quad \Omega_2 = -\Omega_1.$$

从 $2|a|^2-p_1^2-p_2^2>0$ 和 $p_1=n\pi/l_1, p_2=n\pi/l_2=kp_1, k=l_1/l_2>1$, 我们得到 $p_1<\dfrac{\sqrt{2}|a|}{\sqrt{1+k^2}}\ (1<k)$. 于是式 (4.3.1) 有如下形式的异宿解

$$\begin{cases} q_j=(a_0+\mathrm{i}b_0)\dfrac{1+b_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+\mathrm{i}p_2y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}p_2y})\mathrm{e}^{\Omega_jt+\gamma}+b_3\mathrm{e}^{2\Omega_jt+2\gamma}}{1+b_4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+\mathrm{i}p_2y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}p_2y})\mathrm{e}^{\Omega_jt+\gamma}+b_5\mathrm{e}^{2\Omega_jt+2\gamma}}, \\ \phi_j=(a_0^2+b_0^2)-\dfrac{16p_1^2b_4^2+4p_1^2b_4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+\mathrm{i}p_2y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}p_2y})(\mathrm{e}^{-\Omega_jt-\gamma}+b_5\mathrm{e}^{\Omega_jt+\gamma})}{[\mathrm{e}^{-\Omega_jt-\gamma}+b_4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+\mathrm{i}p_2y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}p_2y})+b_5\mathrm{e}^{\Omega_jt+\gamma}]^2}, \\ \qquad j=1,2. \end{cases} \tag{4.3.6}$$

由式 (4.3.6) 给出的解表示轨道分别异宿到环 $|q|^2=a_0^2+b_0^2$ 和 $\varphi=|a|^2$ 的两个不同的不动点上. 即:

当 $t\to+\infty$

$$(q_1,\varphi_1)\to\left(\left(\frac{\mathrm{i}\Omega-p_1^2+p_2^2}{\mathrm{i}\Omega+p_1^2-p_2^2}\right)^2(a_0+\mathrm{i}b_0), a_0^2+b_0^2\right),$$

$$(q_2,\varphi_2)\to(a_0+\mathrm{i}b_0, a_0^2+b_0^2).$$

当 $t\to-\infty$

$$(q_1,\varphi_1)\to(a_0+\mathrm{i}b_0, a_0^2+b_0^2),$$

$$(q_2,\varphi_2)\to\left(\left(\frac{\mathrm{i}\Omega-p_1^2+p_2^2}{\mathrm{i}\Omega+p_1^2-p_2^2}\right)^2(a_0+\mathrm{i}b_0), a_0^2+b_0^2\right)$$

令

$$\left(\frac{\mathrm{i}\Omega-p_1^2+p_2^2}{\mathrm{i}\Omega+p_1^2-p_2^2}\right)^2=c+d\mathrm{i},$$

因此当 $c^2+d^2=1$ 时, $\left(\left(\dfrac{\mathrm{i}\Omega-p_1^2+p_2^2}{\mathrm{i}\Omega+p_1^2-p_2^2}\right)^2(a_0+\mathrm{i}b_0), a_0^2+b_0^2\right)$ 是另一个不动点. 由于 c 和 d 是任意实数, 由 $\left(\left(\dfrac{\mathrm{i}\Omega-p_1^2+p_2^2}{\mathrm{i}\Omega+p_1^2-p_2^2}\right)^2(a_0+\mathrm{i}b_0), a_0^2+b_0^2\right)$ 得到不同的 $(a_0+\mathrm{i}b_0, a_0^2+b_0^2)$, 表明由式 (4.3.6) 给出的 DSII 方程 (4.2.1) 的解是异宿解.

用类似的方法我们得到 DSII 方程同宿筒的表达式为

$$\begin{aligned} &q_j=a\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}a^2t}\frac{1+b_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+\mathrm{i}p_2y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}p_2y})\mathrm{e}^{\Omega_jt+\gamma}+b_3\mathrm{e}^{2\Omega_jt+2\gamma}}{1+b_4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+\mathrm{i}p_2y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}p_2y})\mathrm{e}^{\Omega_jt+\gamma}+b_5\mathrm{e}^{2\Omega_jt+2\gamma}}, \\ &\varphi_j=\frac{8p_1^2+2b_4^2p_1^2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+\mathrm{i}p_2y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}p_2y})(\mathrm{e}^{-\Omega_jt-\gamma}+b_5\mathrm{e}^{\Omega_jt+\gamma})}{[\mathrm{e}^{-\Omega_jt-\gamma}+b_4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x+\mathrm{i}p_2y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}p_2y})+b_5\mathrm{e}^{\Omega_jt+\gamma}]^2}, \\ &j=1,2, \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

其中, $a, b_1, b_3, b_4, b_5, p_1, p_2, \Omega_1, \Omega_2$ 满足

$$b_1 = \frac{\mathrm{i}\Omega - p_2^2 + p_1^2}{\mathrm{i}\Omega + p_2^2 - p_1^2} b_4, \quad b_3 = \left(\frac{\mathrm{i}\Omega - p_2^2 + p_1^2}{\mathrm{i}\Omega + p_2^2 - p_1^2}\right)^2 b_5, \quad b_5 = \frac{\Omega^2 + (p_1^2 - p_2^2)^2}{\Omega^2} b_4^2,$$

$$\Omega^2 = \frac{(p_1^2 - p_2^2)^2(4a^2 - p_1^2 - p_2^2)}{p_1^2 + p_2^2}, \quad \Omega_1 = -\Omega_1 = \sqrt{\Omega}.$$

由式 (4.3.7) 给出的解表明轨道是分别同宿到不动环上, 即:

当 $t \to +\infty$ 时

$$(q_1, \phi_1) \to \left(\left(\frac{\mathrm{i}\Omega_1 - p_2^2 + p_1^2}{\mathrm{i}\Omega_1 + p_2^2 - p_1^2}\right)^2 a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a^2 t}, 0\right), \quad (q_2, \phi_2) \to (a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a^2 t}, 0),$$

当 $t \to -\infty$ 时

$$(q_1, \phi_1) \to (a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a^2 t}, 0), \quad (q_2, \phi_2) \to \left(\left(\frac{\mathrm{i}\Omega_1 + p_1^2 - p_2^2}{\mathrm{i}\Omega_1 - p_1^2 + p_2^2}\right)^2 a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a^2 t}, 0\right),$$

从而表明在同宿解 (q_1, ϕ_1) 和 (q_2, ϕ_2) 之间有一个相位差. 如果 $(q_1(x_0, y_0, t), \phi_1(x_0, y_0, t))$ 是一个同宿解, 则 $\left(q_1\left(x_0 + \frac{\pi}{p_1}, y_0 + \frac{\pi}{p_2}, t\right), \phi_1\left(x_0 + \frac{\pi}{p_1}, y_0 + \frac{\pi}{p_2}, t\right)\right)$ 也是一个同宿解. (q_1, ϕ_1) 和 (q_2, ϕ_2) 形成一个对称的同宿轨, 所有这些轨道形成了同宿筒.

4.3.2 DSII 方程同宿筒的结构

我们讨论 DSII 方程同宿筒解 (q_1, φ_1) 的结构, 对于 (q_2, φ_2) 结果类似.

令

$$\frac{\mathrm{i}\Omega - p_2^2 + p_1^2}{\mathrm{i}\Omega + p_2^2 - p_1^2} = \frac{(p_1^2 - p_2^2)^2 - \Omega^2 + 2\Omega_1(p_1^2 - p_2^2)\mathrm{i}}{-(\Omega^2 + (p_1^2 - p_2^2)^2)} = X + Y\mathrm{i},$$

得到

$$X = \frac{\Omega^2 - (p_1^2 - p_2^2)^2}{\Omega^2 + (p_1^2 - p_2^2)^2},$$

$$Y = -\frac{2\Omega(p_1^2 - p_2^2)}{\Omega^2 + (p_1^2 - p_2^2)^2},$$

因此

$$q_1 = a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a^2 t} \frac{1 + 2(X + Y\mathrm{i})b_4 \cos(p_1 x + p_2 y)\mathrm{e}^{\Omega_1 t + \gamma} + ((X + Y\mathrm{i})Zb_4\mathrm{e}^{\Omega_1 t + \gamma})^2}{1 + 2b_4 \cos(p_1 x + p_2 y)\mathrm{e}^{\Omega_1 t + \gamma} + (Zb_4\mathrm{e}^{\Omega_1 t + \gamma})^2},$$

其中 $Z^2 = \dfrac{\Omega^2 + (p_2^2 - p_1^2)^2}{\Omega_1^2}$. 容易看出 (q_1, φ_1) 是三维光滑曲面, 依赖于变量

$$(x, y, t) \in \left(\frac{2n\pi}{p_1}, \frac{2(n+1)\pi}{p_1}\right) \times \left(\frac{2n\pi}{p_2}, \frac{2(n+1)\pi}{p_2}\right) \times (-\infty, +\infty),$$

$$n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2 \cdots$$

和参数空间

$$(a, p_1, p_2) \in \mathbf{R}_+ \times \left(0, 2k\sqrt{\frac{2a^2}{1+k^2}}\right) \times \left(0, 2\sqrt{\frac{2a^2}{1+k^2}}\right).$$

设 $q_1 = \rho_1(x,y,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x,y,t)}$ (注意到 $X^2+Y^2=1$), 则

$$\rho_1^2 = \frac{\Gamma_4 + \Gamma_5}{\Gamma_6},$$

其中

$$\begin{aligned}
\Gamma_4 =& a^2[1 + 4XE(t)\cos(p_1x+p_2y) + 2Z^2(X^2-Y^2)E^2(t) \\
&+4\cos^2(p_1x+p_2y)E^2(t)], \\
\Gamma_5 =& a^2[4XZ^2E^3(t)\cos(p_1x+p_2y) + Z^4E^4(t)], \\
\Gamma_6 =& 1 + 4E(t)\cos(p_1x+p_2y) + 2Z^2E^2(t) + 4E^2(t)\cos^2(p_1x+p_2y) \\
&+4Z^2E^3(t)\cos(p_1x+p_2y) + Z^4E^4(t), \\
E(t) =& b_4\mathrm{e}^{\Omega_1 t+\gamma}.
\end{aligned}$$

当 $|t|$ 足够大时, 对任意的 x, y, ρ_1 可以写为

$$\rho_1^2 = \begin{cases} \dfrac{a^2[Z^2E(t) + 4X\cos(p_1x+p_2y)] + \varepsilon_1(x,y,t)}{Z^2E(t) + 4\cos(p_1x+p_2y) + \varepsilon_2(x,y,t)}, & t > 0, \\ \dfrac{a^2[1 + 4XE(t)\cos(p_1x+p_2y)] + \varepsilon_3(x,y,t)}{1 + 4E(t)\cos(p_1x+p_2y) + \varepsilon_4(x,y,t)}, & t < 0, \end{cases} \tag{4.3.8}$$

其中, 当 $|t| \to \infty$, $|\varepsilon_i(x,y,t)| \ll 1$.

注意到 $0 < X < 1$, 我们可以得到: 当 $\cos(p_1x+p_2y) < 0$ 时 $\rho_1^2 \geqslant |a|^2$, 以及当 $\cos(p_1x+p_2y) > 0$ 时 $\rho_1^2 \leqslant |a|^2$.

设 $\rho_1^2 = a^2$, 由式 (4.3.8) 的表达式, 我们有

$$\begin{aligned}
&2Z^2(X-1)\cos(p_1x+p_2y)E^2(t) + Z^2(X^2-Y^2-1)E(t) \\
&\quad +2(X-1)\cos(p_1x+p_2y) = 0.
\end{aligned}$$

将 X, Y, Z 的表达式代入方程, 得到

$$(\Omega_1^2 + (p_1^2-p_2^2)^2)\cos(p_1x+p_2y)E^2(t) + 2\Omega_1^2E(t) + \Omega_1^2\cos(p_1x+p_2y) = 0. \tag{4.3.9}$$

求解式 (4.3.9), 有

$$E(t) = \frac{-\Omega_1^2\left(1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{[\Omega_1^2 + (p_1^2-p_2^2)^2]}{\Omega_1^2}\cos^2(p_1x+p_2y)}\ \right)}{(\Omega_1^2 + (p_1^2-p_2^2)^2)\cos(p_1x+p_2y)}.$$

选择 $b_4 > 0$, 为使 $E(t) > 0$, 必须 $\cos(p_1 x + p_2 y) < 0$, 于是

$$p_1 x + p_2 y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \arccos\frac{1}{Z}\right) \cup \left(\pi + \arccos\frac{1}{Z}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

当 $t > 0$, $|\cos(p_1 x + p_2 y)| \ll 1$, 有 $E(t) \to +\infty$. 当 $t < 0$ ($|t|$ 足够大), 选择 x, y 使得 $\frac{\sqrt{\Omega_1^2 + (p_1^2 - p_2^2)^2}}{\Omega_1}|\cos(p_1 x + p_2 y)| = \varepsilon(\varepsilon \ll 1)$ 成立, 于是

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{\Omega_1(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2})}{\sqrt{\Omega_1^2 + (p_1^2 - p_2^2)^2}\varepsilon} = \frac{\Omega_1 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^4)}{2\varepsilon\sqrt{\Omega_1^2 + (p_1^2 - p_2^2)^2}} \\ &= \frac{\Omega_1 \varepsilon + o(\varepsilon^3)}{2\sqrt{\Omega_1^2 + (p_1^2 - p_2^2)^2}} \to 0. \end{aligned}$$

一方面, 由上述讨论可以看出同宿流对于 (x, y) 是周期的, 穿过 $\rho = a$ 相面并随着 x, y 变换在其一个小邻域内来回摆动. 另一方面,

$$\begin{aligned} \theta(x, y, t) &= -a^2 t + \arctan\frac{2YE(t)\cos(p_1 x + p_2 y) + 2XYZ^2E^2(t)}{1 + 2XE(t)\cos(p_1 x + p_2 y) + (X^2 - Y^2)Z^2E^2(t)} \\ &\to \infty, \qquad t \to \infty \end{aligned}$$

表明轨道在固定点 (x, y) 的相空间内无穷次循环.

4.4 (−,+) 型 DS 方程 Bäcklund-Darboux 变换和 Melnikov 函数

在某些假设条件下, 二维水波表面的时间进化可以用 Davey-Stewartson II (DSII) 方程表示

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t q = (\partial_x^2 - \partial_y^2)q + [2(|q|^2 - \omega^2) + \varphi_y]q, \\ (\partial_x^2 + \partial_y^2)\varphi = -4\partial_y(|q|^2), \end{cases} \tag{4.4.1}$$

其中, q 和 φ 分别是变量 (t, x, y) 的复值和实值函数; ω 是一正常数.

加入周期边界条件

$$q(t, x + 2\pi, y) = q(t, x, y) = q(t, x, y + 2\pi),$$

$$\varphi(t, x + 2\pi, y) = \varphi(t, x, y) = \varphi(t, x, y + 2\pi)$$

和偶约束条件

$$q(t, -x, y) = q(t, x, y) = q(t, x, -y),$$

$$\varphi(t,-x,y)=\varphi(t,x,y)=\varphi(t,x,-y).$$

更一般性, 我们研究广义 DS 方程

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t q=[\partial_x^2+\alpha^2\partial_y^2]q-(r_1-r_2)q, \\ \mathrm{i}\partial_t r=-[\partial_x^2+\alpha^2\partial_y^2]r+(r_1-r_2)r, \\ (\alpha\partial_y-\partial_x)r_1=[\alpha\partial_y+\partial_x](qr), \\ (\alpha\partial_y+\partial_x)r_2=[-\alpha\partial_y+\partial_x](qr), \end{cases} \tag{4.4.2}$$

其中, $\alpha^2=\pm1$, (q,r,r_1,r_2) 是变量 (t,x,y) 的复值函数. 当 $\alpha^2=-1, r=\overline{q}$ 时, 式 (4.4.2) 可以导出聚焦型 DSII 方程 (4.4.1). 设 r_1, r_2 为

$$r_1=\frac{1}{2}[-u+\mathrm{i}v], \qquad r_2=\frac{1}{2}[u+\mathrm{i}v],$$

这里 u 和 v 是实值函数满足

$$[\partial_x^2+\partial_y^2]u=2[\partial_x^2-\partial_y^2]|q|^2,$$

$$[\partial_x^2+\partial_y^2]v=\mathrm{i}4\alpha\partial_x\partial_y|q|^2.$$

再利用变量变换 $u=1(|q|^2-\omega^2)+\varphi_y$, 就得到方程 (4.4.1).

对广义的 DS 方程, 也规定偶约束条件

$$q(t,-x,y)=q(t,x,y)=q(t,x,-y),$$

$$r(t,-x,y)=r(t,x,y)=r(t,x,-y),$$

$$r_1(t,-x,y)=-r_2(t,x,y)=r_1(t,x,-y),$$

$$r_2(t,-x,y)=-r_1(t,x,y)=r_2(t,x,-y).$$

我们先讨论 DS 方程 (4.4.2) 的 Bäcklund-Darboux 变换, 然后通过一个变换的迭代生成同宿轨来处理所有不稳定和稳定模.

在无穷维动力系统中, Melnikov 理论最重要的部分是选择适合大维数的 Melnikov 矢量. 对经典的三次非线性 Schrödinger 方程 (NLS), 其 Lax 对的空间部分是一个常微分方程满足 Floquet 理论. 而对于 DS 方程, 其 Lax 对的空间部分是一个偏微分方程, 没有 Floquet 判别式. 利用 Bloch 函数的二次型建立 Melnikov 矢量, 使其保留 Poisson 性质与 Hamiltonian 可交换并当时间趋于正负无穷时指数衰减. 特别对于 DSII 方程, 有 Melnikov 积分

$$M=2\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left\{(\psi_2\hat{\psi}_2)f+(\psi_1\hat{\psi}_1)\overline{f}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t,$$

其中, εif 是扰动; ψ 是 Lax 对的解; $\hat{\psi}$ 是等同 Lax 对的解, 积分等于在某个中心不稳定 (或中心稳定) 流形上求一个未扰动的异宿轨道, 这样的轨道可以由 Bäcklund-Darboux 变换获得.

对扰动的 DS 方程, Melnikov 函数可以用来求通过 Bäcklund-Darboux 变换迭代产生的同宿轨.

本节内容主要参考 Y.Li (2000).

4.4.1 DS 方程的 Bäcklund-Darboux 变换

我们首先讨论广义 DS 方程的 Bäcklund-Darboux 变换, 然后讨论 DSII 方程的情况.

(1) Lax 对和等同的 Lax 对

对应于广义 DS 方程 (4.4.1) 的 Lax 对定义如下

$$L\phi = \lambda\phi, \tag{4.4.3}$$

$$\partial_t\phi = A\phi, \tag{4.4.4}$$

其中, $\phi = (\phi_1, \phi_2)^{\mathrm{T}}$, 且

$$L = \begin{pmatrix} D^- & q \\ r & D^+ \end{pmatrix},$$

$$A = \mathrm{i}\left[2\begin{pmatrix} -\partial_x^2 & q\partial_x \\ r\partial_x & \partial_x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 & (D^+q) \\ -(D^-r) & r_2 \end{pmatrix}\right].$$

这里

$$D^+ = \alpha\partial_y + \partial_x, \qquad D^- = \alpha\partial_y - \partial_x \tag{4.4.5}$$

注意到广义 DS 方程 (4.4.1) 在 σ 变换下是不变的:

$$\sigma \circ (q, r, q_1, r_2; \alpha) = (q, r, -r_2, -r_1; -\alpha). \tag{4.4.6}$$

注 1 注意到 $\sigma^2 = I$. 因此, 广义 DS 方程 (4.4.2) 在对称群 $G = \{\sigma, I\}$ 的作用下是不变的.

把变换 σ 式 (4.4.6) 代入 Lax 对式 (4.4.3)、式 (4.4.4) 中, 就会得到一个等同的 Lax 对, 其相容性条件也得到同样的广义 DS 方程 (4.4.2). 等同的 Lax 对表示为

$$\hat{L}\hat{\psi} = \lambda\hat{\psi}, \tag{4.4.7}$$

$$\partial_t\hat{\psi} = \hat{A}\hat{\psi}, \tag{4.4.8}$$

其中, $\hat{\psi} = (\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2)^{\mathrm{T}}$, 且

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -D^+ & q \\ r & -D^{-1} \end{pmatrix}.$$

Lax 对式 (4.4.3)、式 (4.4.4) 的相容性条件是

$$\partial_t L = [A, L],$$

其中, $[A, L] = AL - LA$, Lax 对式 (4.4.7)、式 (4.4.8) 的相容性条件是

$$\partial_t \hat{L} = [\hat{A}, \hat{L}],$$

得到同样的广义 DS 方程 (4.4.2).

DS 可约化为如下几类: $r = \beta\bar{q}, \beta = \pm 1$;

$$\begin{aligned} \alpha^2 = -1 &\begin{cases} \beta = 1, & \text{DSII} + (\text{聚焦 DSII}), \\ \beta = -1, & \text{DSII} - (\text{散焦 DSII}), \end{cases} \\ \alpha^2 = 1 &\begin{cases} \beta = 1, & \text{DSI}+, \\ \beta = -1, & \text{DSI}-. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

(2) Bäcklund-Darboux 变换定理

设 (q, r, r_1, r_2) 为广义 DS 方程 (4.4.2) 的一个解, 并设 λ_1 和 λ_2 为 λ 的任意两个值. 令 $\psi = (\psi_1, \psi_2)^{\mathrm{T}}$ 和 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^{\mathrm{T}}$ 为 Lax 对式 (4.4.3)、式 (4.4.4) 分别在 $(q, r, r_1, r_2; \lambda_1)$ 和 $(q, r, r_1, r_2; \lambda_2)$ 的特征函数. 定义矩阵算子

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Lambda + a & b \\ c & \wedge + d \end{pmatrix},$$

其中, $\Lambda = \alpha\partial_y - \lambda$, a, b, c, d 为函数定义为

$$a = \frac{1}{\Delta}[\psi_2 \Lambda_2 \varphi_1 - \varphi_2 \Lambda_1 \psi_1], \qquad b = \frac{1}{\Delta}[\varphi_1 \Lambda_1 \psi_1 - \psi_1 \Lambda_2 \varphi_1],$$

$$c = \frac{1}{\Delta}[\psi_2 \Lambda_2 \varphi_2 - \varphi_2 \Lambda_1 \psi_2], \qquad d = \frac{1}{\Delta}[\varphi_1 \Lambda_1 \psi_2 - \psi_1 \Lambda_2 \varphi_2],$$

其中, $\Lambda_1 = \alpha\partial_y - \lambda_1, \Lambda_2 = \alpha\partial_y - \lambda_2$,

$$\Delta = \psi_1\varphi_2 - \varphi_1\psi_2.$$

定义变换如下:

$$\begin{cases} (q, r, r_1, r_2) & \to & (Q, R, R_1, R_2), \\ \phi & \to & \Phi, \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
Q &= q - 2b, \\
R &= r - 2c, \\
R_1 &= r_1 + 2(D^+a), \\
R_2 &= r_2 - 2(D^-d), \\
\Phi &= \Gamma\phi,
\end{aligned}
\tag{4.4.10}
$$

这里 ϕ 是在 $(q, r, r_1, r_2; \lambda)$ 求解 Lax 对式 (4.4.3)、式 (4.4.4) 的特征函数, D^+ 和 D^- 的定义同式 (4.4.5).

定理 4.4.1 变换 (4.4.10) 是一个 Bäcklund-Darboux 变换. 即由式 (4.4.10) 定义的函数 (Q, R, R_1, R_2) 是广义 Davey-Stewartson 方程 (4.4.2) 的一个解, 且通过变换 (4.4.10) 定义的函数 Φ 可在 $(Q, R, R_1, R_2; \lambda)$ 处求解 Lax 对式 (4.4.3)、式 (4.4.4).

注 2 将对称 σ 式 (4.4.5) 应用到 Bäcklund-Darboux 变换 (4.4.10) 中, 可得到等同的 Lax 对式 (4.4.7)、式 (4.4.8) 的相应定理.

(3) 用 Bäcklund-Darboux 变换定理约化 Davey-Stewartson II

在这一节中, 我们将用上一节中得到的广义 Bäcklund-Darboux 变换推导一个对应于 DSII 约化的 Bäcklund-Darboux 变换. 首先, 讨论 DSII 约化情况下 r_1 和 r_2 的一些性质. 从式 (4.4.2) 可以立刻得到, 当 $\alpha^2 = -1, r = \beta\bar{q}$ 时, $r_1 - r_2$ 是实值, 则 $r_1 + \bar{r}_2$ 同样也是实数; 进一步有

$$(\alpha\partial_y - \partial_x)(r_1 + \bar{r}_2) = 0,$$

即

$$\partial_x(r_1 + \bar{r}_2) = 0, \qquad \partial_y(r_1 + \bar{r}_2) = 0,$$

则 $r_1 + \bar{r}_2$ 是仅依赖于 t 的函数

$$r_1 + \bar{r}_2 = f(t).$$

定义 $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2$

$$\tilde{r}_1 = r_1 - \frac{1}{2}f(t), \qquad \tilde{r}_2 = r_2 - \frac{1}{2}f(t), \tag{4.4.11}$$

有

$$\tilde{r}_1 + \bar{\tilde{r}}_2 = 0.$$

注意到式 (4.4.2) 在变换 (4.4.11) 下是不变的. 不失一般性, 我们总假设 r_1 和 r_2 满足

$$r_1 + \bar{r}_2 = 0. \tag{4.4.12}$$

等价于 r_1 和 r_2 有下列表达式:

$$r_1 = \frac{1}{2}[-u + \mathrm{i}v], \qquad r_2 = \frac{1}{2}[u + \mathrm{i}v], \tag{4.4.13}$$

其中, u 和 v 是实值函数.

其次我们讨论在 DSII 约化下 Lax 对式 (4.4.3)、式 (4.4.4) 的对称性.

引理 4.4.2 当 $(\alpha^2=-1, r=\beta\bar{q}, \beta=\pm 1)$ 时, 若 $\psi=(\psi_1,\psi_2)^{\mathrm{T}}$ 是 Lax 对式 (4.4.3)、式 (4.4.4) 在 $(q, r=\beta\bar{q}, r_1, r_2; \lambda)$ 的解, 则 $\varphi=(\psi_2, -\beta\bar{\psi}_1)^{\mathrm{T}}$ 是 Lax 对式 (4.4.3)、式 (4.4.4) 在 $(q, r=\beta\bar{q}, r_1, r_2; -\bar{\lambda})$ 的解.

证明 直接验证即得.

把引理 4.4.2 应用到广义的 Bäcklund-Darboux 变换定理 4.4.1 中, 我们得到对应于 DSII 约化问题的 Bäcklund-Darboux 变换. 设 $(q, r=\beta\bar{q}, r_1, r_2)$ 为 DSII 方程的解 (式 (4.4.2) 取 $(\alpha^2=-1, r=\beta\bar{q}, \beta=\pm 1)$), λ_0 是 λ 的任意值. 假设 $\psi=(\psi_1,\psi_2)^{\mathrm{T}}$ 为在 $(q, r=\beta\bar{q}, r_1, r_2; \lambda_0)$ 求解 Lax 对式 (4.4.3)、式 (4.4.4) 的特征函数, 则由引理 4.4.2, $\varphi=(\bar{\psi}_2, -\beta\bar{\psi}_1)^{\mathrm{T}}$ 是在 $(q, r=\beta\bar{q}, r_1, r_2; -\lambda_0)$ 求解 Lax 对式 (4.4.3)、式 (4.4.4) 的特征函数. 定义矩阵算子

$$\Gamma=\begin{bmatrix} \Lambda+a & b \\ c & \Lambda+d \end{bmatrix},$$

其中, $\Lambda=\alpha\partial_y-\lambda$, 且 a,b,c,d 都是函数, 定义如下

$$a=\frac{1}{\Delta}[\psi_2\Lambda_2\bar{\psi}_2+\beta\bar{\psi}_1\Lambda_1\psi_1], \qquad b=\frac{1}{\Delta}[\bar{\psi}_2\Lambda_1\psi_1-\psi_1\Lambda_2\bar{\psi}_2],$$

$$c=\frac{\beta}{\Delta}[\bar{\psi}_1\Lambda_1\psi_2-\psi_2\Lambda_2\bar{\psi}_1], \qquad d=\frac{1}{\Delta}[\bar{\psi}_2\Lambda_1\psi_2+\beta\psi_1\Lambda_2\bar{\psi}_1],$$

其中, $\Lambda_1=\alpha\partial_y-\lambda_0, \Lambda_2=\alpha\partial_y+\bar{\lambda}_0$, 及

$$\Delta=-[\beta|\psi_1|^2+|\psi_2|^2].$$

定义如下变换:

$$\begin{cases} (q, r=\beta\bar{q}, r_1, r_2) & \rightarrow & (Q, R, R_1, R_2), \\ \phi & \rightarrow & \Phi, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &Q=q-2b, \\ &R=\beta\bar{q}-2c, \\ &R_1=r_1+2(D^+a), \\ &R_2=r_2-2(D^-d), \qquad \Phi=\Gamma\phi, \end{aligned} \tag{4.4.14}$$

其中, ϕ 是在 $(q, r=\beta\bar{q}, r_1, r_2; \lambda)$ 求解 Lax 对式 (4.4.3)、式 (4.4.4) 的特征函数, D^+ 和 D^- 定义如式 (4.4.5).

定理 4.4.3 变换 (4.4.14) 是一个 Bäcklund-Darboux 变换. 即由变换 (4.4.14) 定义的函数 (Q, R, R_1, R_2) 也是 DSII 方程 (式 (4.4.2) 当 $(\alpha^2 = -1, r = \beta\bar{q}, \beta = \pm 1)$) 的一个解,

$$R = \beta\bar{Q}, \qquad R_1 + \bar{R}_2 = 0. \tag{4.4.15}$$

由变换 (4.4.14) 定义的函数 Φ 可在 $(Q, R, R_1, R_2; \lambda)$ 求解 Lax 对式 (4.4.3)、式 (4.4.4).

证明 只需证明式 (4.4.15) 成立. 注意到 $\bar{\Lambda}_1 = -\Lambda_2$. 则直接验证可得

$$\bar{a} = -d, \qquad \beta\bar{b} = c.$$

于是

$$R = \beta\bar{Q}, \qquad R_1 + \bar{R}_2 = r_1 + \bar{r}_2 = 0,$$

证明完成.

注 3 这个定理在 (Y Li et al 1993) 中有叙述. 由表达式 (4.4.13)

$$u = r_2 - r_1, \qquad v = -\mathrm{i}[r_1 + r_2], \tag{4.4.16}$$

我们引入记号

$$\tilde{U} = R_2 - R_1, \qquad \tilde{V} = -\mathrm{i}[R_1 + R_2], \tag{4.4.17}$$

则由 Bäcklund-Darboux 变换 (4.4.14), 得

$$\tilde{U} = u - 2[D^+a + D^-d] = u - 4\mathrm{Re}\{D^+a\}, \tag{4.4.18}$$

$$\tilde{V} = v - \mathrm{i}2[D^+a - D^-d] = v + 4\mathrm{Im}\{D^+a\}. \tag{4.4.19}$$

4.4.2 特征函数的二次积

在这一节中, 先证明求解 Lax 对式 (4.4.3)、式 (4.4.4) 和等同 Lax 对式 (4.4.7)、式 (4.4.8) 的特征函数二次积求解广义 DS 方程, 然后讨论 DS 约化问题. 特征函数的二次积可以用于建立 DS 方程切丛的基, 特别地, 它们表示 DS 方程的线性不稳定性. 这样的二次积将用于构造 Mel'nikov 向量.

考虑线性化的广义 Davey-Stewartson 方程

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t\delta q = [\partial_x^2 + \alpha^2\partial_y^2]\delta q - (r_1 - r_2)\delta q - (\delta r_1 - \delta r_2)q, \\ \mathrm{i}\partial_t\delta r = -[\partial_x^2 + \alpha^2\partial_y^2]\delta r + (r_1 - r_2)\delta r + (\delta r_1 - \delta r_2)r, \\ [\alpha\partial_y - \partial_x]\,\delta r_1 = [\alpha\partial_y + \partial_x](q\delta r + r\delta q), \\ [\alpha\partial_y + \partial_x]\,\delta r_2 = [-\alpha\partial_y + \partial_x](q\delta r + r\delta q). \end{cases} \tag{4.4.20}$$

设 $\psi=(\psi_1,\psi_2)^{\mathrm{T}}$ 为在 $(q,r,q_1,r_2;\lambda)$ 求解 Lax 对式 (4.4.3)、式 (4.4.4) 的特征函数, $\hat{\psi}=(\hat{\psi}_1,\hat{\psi}_2)^{\mathrm{T}}$ 为在 $(q,r,q_1,r_2;\lambda)$ 求解等同 Lax 对式 (4.4.7)、式 (4.4.8) 的特征函数, 定义

$$\begin{cases}\delta q=\psi_1\hat{\psi}_1,\\ \delta r=-\psi_2\hat{\psi}_2,\\ \delta r_1=D^+(\psi_1\hat{\psi}_2),\\ \delta r_2=D^-(\psi\hat{\psi}_1).\end{cases}\tag{4.4.21}$$

定理 4.4.4 由式 (4.4.21) 定义的函数 $(\delta q,\delta r,\delta r_1,\delta r_2)$ 是线性化广义 DS 方程 (4.4.20) 的解.

证明 由式 (4.4.4)、式 (4.4.8), 有

$$\mathrm{i}\partial_t(\psi_1\hat{\psi}_1)=S_1+S_2-(r_1-r_2)(\psi_1\hat{\psi}_1),\tag{4.4.22}$$

其中

$$S_1=2[\hat{\psi}_1\partial_x^2\psi_1+\psi_1\partial_x^2\hat{\psi}_1],$$

$$S_2=(D^-q)\psi_1\hat{\psi}_2-(D^+q)\hat{\psi}_1\psi_2-2q[\hat{\psi}_1\partial_x\psi_2+\psi_1\partial_x\hat{\psi}_2].$$

由式 (4.4.3)、式 (4.4.7), 我们有

$$\partial_x^2\psi_1=\alpha^2\partial_y^2\psi_1+D^+(q\psi_2-\lambda\psi_1),\tag{4.4.23}$$

$$\partial_x^2\hat{\psi}_1=\alpha^2\partial_y^2\hat{\psi}_1-D^-(q\hat{\psi}_2-\lambda\hat{\psi}_1).\tag{4.4.24}$$

于是

$$S_1=[\partial_x^2+\alpha^2\partial_y^2](\psi_1\hat{\psi}_1)+S_{11},\tag{4.4.25}$$

其中

$$S_{11}=\hat{\psi}_1D^+(1\psi_2-\lambda\psi_1)-\psi_1D^-(q\hat{\psi}_2-\lambda\hat{\psi}_1)-2(\partial_x\psi_1\partial_x\hat{\psi}_1+\alpha\partial_y\psi_1\alpha\partial_y\hat{\psi}_1).$$

应用式 (4.4.3)、式 (4.4.7), 得

$$S_2+S_{11}=-q[D^+(\psi_1\hat{\psi}_2)-D^-(\hat{\psi}_1\psi_2)].\tag{4.4.26}$$

由式 (4.4.22)、式 (4.4.25)、式 (4.4.26)、式 (4.4.20) 中的 δq 方程得以验证. 其次, 我们验证 δr 的方程. 由式 (4.4.4)、式 (4.4.8), 有

$$\mathrm{i}\partial_t(\psi_2\hat{\psi}_2)=S_3+S_4+(r_1-r_2)(\psi_2\hat{\psi}_2),\tag{4.4.27}$$

其中

$$S_3 = -2[\psi_2\partial_x^2\hat{\psi}_2 + \hat{\psi}_2\partial_x^2\psi_2],$$

$$S_4 = (D^-r)\psi_1\hat{\psi}_2 - (D^+r)\hat{\psi}_1\psi_2 - 2r[\hat{\psi}_2\partial_x\psi_1 - 2r\psi_2\partial_x\hat{\psi}_1].$$

由式 (4.4.3)、式 (4.4.7), 有

$$\partial_x^2\psi_2 = \alpha^2\partial_y^2\psi_2 + D^-(r\psi_1 - \lambda\psi_2), \tag{4.4.28}$$

$$\partial_x^2\hat{\psi}_2 = \alpha^2\partial_y^2\hat{\psi}_2 - D^+(r\hat{\psi}_1 - \lambda\hat{\psi}_2). \tag{4.4.29}$$

由式 (4.4.27)、式 (4.4.28)、式 (4.4.29), 得

$$S_3 = -[\partial_x^2 + \alpha^2\partial_y^2](\psi_2\hat{\psi}_2) + S_{31}, \tag{4.4.30}$$

其中

$$S_{31} = \psi_2 D^+(r\hat{\psi}_1 - \lambda\hat{\psi}_2) - \hat{\psi}_2 D^-(r\psi_1 - \lambda\psi_2) + 2(\partial_x\psi_2\partial_x\hat{\psi}_2 + \alpha\partial_y\psi_2\alpha\partial_y\hat{\psi}_2).$$

应用式 (4.4.3)、式 (4.4.7), 得

$$S_4 + S_{31} = -r[D^+(\psi_1\hat{\psi}_2) - D^-(\psi_2\hat{\psi}_1)]. \tag{4.4.31}$$

由式 (4.4.27)、式 (4.4.30)、式 (4.4.31), δr 的方程得证. 最后我们验证 δr_1 和 δr_2 的方程. 由式 (4.4.3)、式 (4.4.7), 得

$$D^-(\psi_1\hat{\psi}_2) = r(\psi_1\hat{\psi}_1) - q(\psi_2\hat{\psi}_2).$$

于是

$$D^-D^+(\psi_1\hat{\psi}_2) = D^+D^-(\psi_1\hat{\psi}_2) = D^+[r(\psi_1\hat{\psi}_1) - q(\psi_2\hat{\psi}_2)].$$

从而式 (4.4.20) 中的 δr_1 方程得证. 同样

$$D^+(\psi_2\hat{\psi}_1) = -r(\psi_1\hat{\psi}_1) - q(\psi_2\hat{\psi}_2).$$

于是

$$D^+D^-(\psi_2\hat{\psi}_1) = D^-D^+(\psi_2\hat{\psi}_1) = -D^-[r(\psi_1\hat{\psi}_1) - q(\psi_2\hat{\psi}_2)].$$

式 (4.4.20) 中的 δr_2 方程得证. 定理证明完成.

现在我们研究 Davey-Stewartson 约化问题：在式 (4.4.9) 中 $(r = \beta\bar{q}, \beta = \pm 1)$,

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t\delta q = [\partial_x^2 + \alpha^2\partial_y^2]\delta q - (r_1 - r_2)\delta q - (\delta r_1 - \delta r_2)q, \\ \mathrm{i}\partial_t(\beta\overline{\delta q}) = -[\partial_x^2 + \alpha^2\partial_y^2](\beta\overline{\delta q}) + (r_1 - r_2)(\beta\overline{\delta q}) + (\delta r_1 - \delta r_2)(\beta\bar{q}), \\ [\alpha\partial_y - \partial_x]\,\delta r_1 = [\alpha\partial_y + \partial_x]\,(\beta q\overline{\delta q} + \beta\bar{q}\delta q), \\ [\alpha\partial_y + \partial_x]\,\delta r_2 = [-\alpha\partial_y + \partial_x]\,(\beta q\overline{\delta q} + \beta\bar{q}\delta q). \end{cases} \tag{4.4.32}$$

令 $\psi=(\psi_1,\psi_2)^{\mathrm{T}}$ 为求解 Lax 对式 (4.4.3)、式 (4.4.4) 在 $(q,\beta\bar{q},r_1,r_2;\lambda)$ 的特征函数, $\hat{\psi}=(\hat{\psi}_1,\hat{\psi}_2)^{\mathrm{T}}$ 为求解等同 Lax 对式 (4.4.7)、式 (4.4.8) 在 $(q,\beta\bar{q},r_1,r_2;\lambda)$ 的特征函数. 定义

$$\begin{pmatrix}\delta q\\ \beta\overline{\delta q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{\delta q}\\ \widetilde{\delta q}\end{pmatrix}+\beta S\overline{\begin{pmatrix}\widetilde{\delta q}\\ \widetilde{\delta q}\end{pmatrix}},$$

其中, $S=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, "-" 表示复共轭

$$\begin{aligned}\delta r_1&=\begin{cases}\widetilde{\delta r}_1+\overline{\widetilde{\delta r}_1}, & \alpha^2=1,\\ \widetilde{\delta r}_1-\overline{\widetilde{\delta r}_2}, & \alpha^2=-1,\end{cases}\\ \delta r_2&=\begin{cases}\widetilde{\delta r}_2+\overline{\widetilde{\delta r}_2}, & \alpha^2=1,\\ \widetilde{\delta r}_2-\overline{\widetilde{\delta r}_1}, & \alpha^2=-1,\end{cases}\end{aligned}\tag{4.4.33}$$

其中

$$\widetilde{\delta q}=\psi_1\hat{\psi}_1,\quad \widetilde{\delta r}=-\psi_2\hat{\psi}_2,\quad \widetilde{\delta r}_1=D^{+}(\psi_1\hat{\psi}_2),\quad \widetilde{\delta r}_2=D^{-}(\psi_2\hat{\psi}_1).$$

定理 4.4.5　由式 (4.4.33) 定义的 $(\delta q,\beta\overline{\delta q},\delta r_1,\delta r_2)$ 是线性化 Davey-Stewartson 方程 (4.4.32) 的解.

证明　由定理 4.4.3, $(\widetilde{\delta q}\widetilde{\delta r},\widetilde{\delta r}_1,\widetilde{\delta}_2)$ 是方程 (4.4.20) 在 $(q,\beta\bar{q},r_1,r_2)$ 的解. 直接验证可以得到: 当 $\alpha^2=1$, $(\beta\overline{\widetilde{\delta r}},\beta\overline{\widetilde{\delta q}},\overline{\widetilde{\delta r}_1},\overline{\widetilde{\delta r}_2})$ 也是方程 (4.4.20) 在 $(q,\beta\bar{q},r_1,r_2)$ 的解; 当 $\alpha^2=-1$, $(\beta\overline{\widetilde{\delta r}},\beta\overline{\widetilde{\delta q}},-\overline{\widetilde{\delta r}_2},-\overline{\widetilde{\delta r}_1})$ 是方程 (4.4.20) 在 $(q,\beta\bar{q},r_1,r_2)$ 的解. 因此, 由式 (4.3.33) 定义的 $(\delta q,\beta\overline{\delta q},\delta r_1,\delta r_2)$ 是线性化 DS 方程 (4.4.32) 的解. 定理证毕.

4.4.3　Melnikov 矢量和 Melnikov 函数

广义 DS 方程 (4.4.2) 是一个 Hamiltonian 系统, 可以写成如下 Hamiltonian 形式:

$$\begin{cases}\mathrm{i}\partial_t q=\dfrac{\delta H}{\delta r},\\[2mm] \mathrm{i}\partial_t r=-\dfrac{\delta H}{\delta q},\end{cases}$$

其中

$$H=\begin{cases}-\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[q_x r_x+\alpha^2 q_y r_y+\frac{1}{2}(r_1-r_2)qr\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\\ \quad\text{在周期为}\{2\pi,2\pi\}\text{边界条件下},\\ -\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[q_x r_x+\alpha^2 q_y r_y\frac{1}{2}(r_1-r_2)qr\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\\ \quad\text{在衰减的边界条件下}.\end{cases}$$

我们把上述 Hamiltonian 形式记为 $J\nabla H$, 其中 $\mathcal{J}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

在上一节中, 我们看到特征函数的二次积可求解 Lax 对和等同 Lax 对, 以及求解线性 Davey-Stewartson 方程, 从而可导出 DS 方程的切丛坐标系. 这里, 我们将用该特征函数二次积推导 Melnikov 函数.

设 $\psi=(\psi_1,\psi_2)^{\mathrm{T}}$ 为求解 Lax 对式 (4.4.3)、式 (4.4.4) 的特征函数, $\hat{\psi}=(\hat{\psi}_1,\hat{\psi}_2)^{\mathrm{T}}$ 为求解对应于等同 Lax 对式 (4.4.7)、式 (4.4.8) 的特征函数, 于是有下面引理

引理 4.4.6 矢量

$$\tilde{\mathcal{U}}=\overline{\begin{pmatrix}\psi_2\hat{\psi}_2\\ \psi_1\hat{\psi}_1\end{pmatrix}},\tag{4.4.34}$$

与式 (4.4.2) 右端给出的矢量域 $J\nabla H$ 的内积为零

$$\langle\tilde{\mathcal{U}},J\nabla H\rangle=0$$

其中

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\overline{f}_1r_1+\overline{f}_2g_2\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明 利用式 (4.4.2), 式 (4.4.3) 和式 (4.4.7), 直接计算即得.

其次, 我们讨论经典的 Davey-Stewartson II 约化情况, 此时 $\alpha^2=-1$ 且 $r=\overline{q}$,

$$\begin{cases}\mathrm{i}q_t=\delta H/\delta\overline{q},\\ \mathrm{i}\overline{q}_t=-\delta H/\delta q,\end{cases}\tag{4.4.35}$$

其中

$$H=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[|q_y|^2-|q_x|^2+\frac{1}{2}(r_2-r_1)|q|^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

引理 4.4.7 矢量

$$\mathcal{U}=\overline{\begin{pmatrix}\psi_2\hat{\psi}_2\\ \psi_1\hat{\psi}_1\end{pmatrix}}+S\begin{pmatrix}\psi_2\hat{\psi}_2\\ \psi_1\hat{\psi}_1\end{pmatrix},\tag{4.4.36}$$

其中, $S=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, 与式 (4.4.35) 右端给出的矢量域 $J\nabla H$ 的内积为 0, 即

$$\langle\mathcal{U},J\nabla H\rangle=0.$$

证明 由引理 4.4.6, 得 $\langle\tilde{\mathcal{U}},J\nabla H\rangle=0$. 即

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{(\psi_2\hat{\psi}_2)\frac{\delta H}{\delta\overline{q}}-(\psi_1\hat{\psi}_1)\frac{\delta H}{\delta q}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

注意到

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{U}, J\nabla H\rangle\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{(\psi_2\hat{\psi}_2)\frac{\delta H}{\delta \overline{q}}-(\psi_1\hat{\psi}_1)\frac{\delta H}{\delta q}+(\psi_1\hat{\psi}_1)^-\frac{\delta H}{\delta \overline{q}}-(\psi_2\hat{\psi}_2)^-\frac{\delta H}{\delta q}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

以及 $\delta H/\delta\overline{q}=(\delta H/\delta q)^-$, 引理得证.

如果我们只考虑偶函数, 即 q 和 $u=r_1-r_1$ 在 x 和 y 方向上都是偶函数, 那么我们可以把 $\mathcal{U}$ 分成奇偶部分

$$\mathcal{U}=\mathcal{U}_{(e,y)}^{(e,x)}+\mathcal{U}_{(o,y)}^{(e,x)}+\mathcal{U}_{(e,y)}^{(o,x)}+\mathcal{U}_{(o,y)}^{(o,x)},$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{(e,y)}^{(e,x)}&=\frac{1}{4}\left[\mathcal{U}(x,y)+\mathcal{U}(-x,y)+\mathcal{U}(x,-y)+\mathcal{U}(-x,-y)\right],\\\mathcal{U}_{(o,y)}^{(e,x)}&=\frac{1}{4}\left[\mathcal{U}(x,y)+\mathcal{U}(-x,y)-\mathcal{U}(x,-y)-\mathcal{U}(-x,-y)\right],\\\mathcal{U}_{(e,y)}^{(o,x)}&=\frac{1}{4}\left[\mathcal{U}(x,y)-\mathcal{U}(-x,y)+\mathcal{U}(x,-y)-\mathcal{U}(-x,-y)\right],\\\mathcal{U}_{(o,y)}^{(o,x)}&=\frac{1}{4}\left[\mathcal{U}(x,y)-\mathcal{U}(-x,y)-\mathcal{U}(x,-y)+\mathcal{U}(-x,-y)\right],\end{aligned}\tag{4.4.37}$$

于是, 我们有如下引理

引理 4.4.8 当 q 和 $u=r_2-r_1$ 都是 x 和 y 方向的偶函数时, 有

$$\langle\mathcal{U}_{(e,y)}^{(e,x)}, J\nabla H\rangle=0.$$

Melnikov 函数的主要用途是在测量扰动可积系统的中心不稳定流形和中心稳定流形的距离. 考虑扰动的广义 DS 方程

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\partial_t q=\left[\partial_x^2+\alpha^2\partial_y^2\right]q-(r_2-r_1)q+\varepsilon\mathrm{i}f,\\&\mathrm{i}\partial_t r=-\left[\partial_x^2+\alpha^2\partial_y^2\right]r+(r_1-r_2)r+\varepsilon\mathrm{i}g,\\&\left[\alpha\partial_y-\partial_x\right]r_1=\left[\alpha\partial_y+\partial_x\right](qr),\\&\left[\alpha\partial_y+\partial_x\right]r_2=\left[-\alpha\partial_y+\partial_x\right](qr),\end{aligned}\tag{4.4.38}$$

其中, $\alpha^2=\pm1$, (q,r,r_1,r_2) 是三变量 (t,x,y) 的复值函数, $\boldsymbol{G}=(f,g)^{\mathrm{T}}$ 是扰动项, 依赖于 q 和 r 以及它们的导数和 t,x,y. 扰动可以是耗散型或 Hamiltonian 型. 由引理 4.4.2, 可以导出 Melnikov 函数的表达式,

$$\begin{aligned}\tilde{M}&=\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tilde{\mathcal{U}},\boldsymbol{G}\rangle\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{(\psi_2\hat{\psi}_2)f+(\psi_1\hat{\psi}_1)g\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{4.4.39}$$

其中, 被积函数是在某个中心不稳定流形上求一个未扰动的异宿轨, 这样的轨道可通过定理 4.4.1 给出的 Bäcklund-Darboux 变换得到.

对于扰动的聚焦型 DSII 方程,

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t q = \left[\partial_x^2 - \partial_y^2\right] a + \left[2(|q|^2 - \omega^2) + \tilde{u}_y\right] q + \varepsilon \mathrm{i} f, \\ \left[\partial_x^2 + \partial_y^2\right] \tilde{u} = -4\partial_y |q|^2, \end{cases} \tag{4.4.40}$$

其中, q 和 $\tilde{u}$ 分别是三变量 (t,x,y) 的复值和实值函数, $\boldsymbol{G} = (f,\overline{f})^{\mathrm{T}}$ 是扰动项, 依赖于 q, $\overline{q}$ 和它们的导数及 t,x,y. 由引理 4.4.2, 可以导出其 Melnikov 函数的表达式

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{\mathcal{U}}, \boldsymbol{G} \rangle \mathrm{d}t \\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re} \left\{ (\psi_2 \hat{\psi}_2) f + (\psi_1 \hat{\psi}_1) \overline{f} \right\} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{4.4.41}$$

其中, 被积函数是在某个中心不稳定流形上求一个未扰动的异宿轨, 这样的轨道可通过定理 4.4.6 给出的 Bäcklund-Darboux 变换得到. 当只考虑偶函数, 即 q 和 u 是 x 和 y 的偶函数时, 对应的 Melnikov 函数为

$$M^{(e)} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathcal{U}_{(e,y)}^{(e,x)}, \boldsymbol{G} \rangle \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathcal{U}, \boldsymbol{G} \rangle \mathrm{d}t, \tag{4.4.42}$$

与表达式 (4.4.41) 相同.

第 5 章　整体吸引子及结构初探

本章讨论扰动的 DSI 和 DSII 方程整体吸引子、广义 DS 方程整体吸引子及惯性流形的存在性问题 (Z Dai et al. 2005, Z Dai et al. 2007, Y Li et al. 2000, B Guo et al. 2000).

5.1　扰动 $(+,-)$ 型 DS 方程的吸引子及同宿异宿流

我们考虑扰动的 Davey-Stewartson I (DSI) 方程:

$$\mathrm{i}\frac{\partial q}{\partial t}+\Delta q=-|q|^2q+q\varphi+\mathrm{i}\varepsilon(\delta\Delta q+|q|^2q-q), \tag{5.1.1}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(|q|^2), \tag{5.1.2}$$

带周期边界条件

$$q(x,y,t),\varphi(x,y,t)\ \text{是}\ \omega\text{周期},\quad \omega=(0,l_1)\times(0,l_2),\ \ t\geqslant 0 \tag{5.1.3}$$

和初始条件

$$q(x,y,0)=q_0(x,y),\qquad (x,y)\in\omega, \tag{5.1.4}$$

其中, $\varDelta=\partial_{x^2}+\partial_{y^2}, l_1>l_2, \delta>0, \varepsilon>0$ 很小.

显然当 $\varepsilon=0$ 时, 式 (5.1.1)~ 式 (5.1.2) 就是 Davey-Stewartson I (DSI) 方程.

5.1.1　扰动的 DSI 方程整体吸引子的存在

设 $H=L^2$, H^1 指通常的周期函数 Sobolev 空间, $\|\cdot\|$ 表示 H 的模, 具通常内积 $(\cdot,\cdot)$, 而 $\|\cdot\|_1$ 指 H^1 的模.

引入变量代换

$$\xi=p_1x+p_2y,\qquad \varphi=\frac{2p_1^2}{p_1^2-p_2^2}(|q|^2-1), \tag{5.1.5}$$

其中, p_1,p_2 与第 4 章定义相同. 则式 (5.1.1)~ 式 (5.1.4) 变为如下耗散的非局部 Ginzburg-Landau 方程

$$\mathrm{i}q_t+(1-\mathrm{i}\varepsilon\delta)(p_1^2+p_2^2)q_{\xi\xi}=-\left(1+\frac{2p_1^2}{p_2^2-p_1^2}-\mathrm{i}\varepsilon\right)|q|^2q+\left(\frac{2p_1^2}{p_2^2-p_1^2}-\mathrm{i}\varepsilon\right)q. \tag{5.1.6}$$

$q(\xi,t)$ 是 2π 周期的,

$$q(\xi,0)=q_0(\xi),\qquad l=p_1l_1+p_2l_2. \tag{5.1.7}$$

设 $q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}u,\alpha=\dfrac{p_1^2+p_2^2}{p_2^2-p_1^2},p_2^2=2p_1^2$, 注意到 $p_1<p_2$, 则式 (5.1.1)~ 式 (5.1.2) 可写为

$$\begin{cases} u_t-3(\varepsilon\delta+\mathrm{i})p_1^2u_{\xi\xi}-(\varepsilon+3\mathrm{i})|u|^2u+(\varepsilon+3\mathrm{i})u=0,\\ u(\xi,0)=u_0(\xi)=-\mathrm{i}q(x,y,0)=-\mathrm{i}q_0(\xi), \end{cases} \tag{5.1.8}$$

其中, $u(\xi,t)$ 是 2π 周期的. 我们有如下定理.

定理 5.1.1 假设 $u_0(\xi)\in H^1(0,l)$ 和 $|u_0(\xi)|_{L^\infty}<1$, 则由式 (5.1.1) ~ 式 (5.1.4) 定义的解算子半群 $S(t)$ 在 $H^1((0,l))$ 中有一个整体吸引子.

证明 写式 (5.1.8) 为

$$u_t+Au=f(u),$$

其中, $A=-3(\varepsilon\delta+\mathrm{i})p_1^2\partial_{\xi\xi}+\varepsilon,f(u)=(\varepsilon+3\mathrm{i})|u|^2u-3\mathrm{i}u$, 注意到 A 是一个扇形算子. 容易验证 $f(u)$ 将 $H^i(0,l)$ 中的有界集映射到 $H^{i-1}(0,l),i\geqslant 1$ 中的有界集且对 H^i 中有界集 u 是局部 Lipschitz. 对于 $u_0\in H^1(0,l)$, 方程 (5.1.8) 在一个最大时间间隔 $[0,T)$ 里有一个唯一解 $u(t)$, $T>0$ 其中

$$u\in C([0,T),H^1(0,l))\cap C((0,T),H^2(0,l)).$$

因此, 为了证明这个定理, 下面几点需要证明:

(i) 解是整体的.

(ii) 存在一个 $H^1((0,l))$ 中的吸收集.

(iii) 由式 (5.1.8) 定义的解算子半群 $S(t)$ 在 H^1 中是紧的.

为了证明解是整体的, 我们只需证明当 $t\to T$ 时, $u(\xi,t)$ 在 $H^1(0,l)$ 中是有界的.

事实上, 因 $u(\xi,t)$ 对 t 是连续的, 且 $|u_0(\xi)|_\infty<1$, 于是存在 t 的一个区间, 使得在其中有 $|u(\xi,t)|_\infty<1$, 注意到 $|u|=1$ 和 $u=0$ 是式 (5.1.8) 的两个平衡解, 由解的唯一性理论, 我们知道在一个最大存在区域内解满足 $|u(\xi,t)|_\infty\leqslant 1$. 表明当 $t\in[0,T)$ 时, $|u(\xi,t)|_\infty\leqslant 1$.

下面我们将证明当 $t\in[0,T)$ 时 $u(\xi,t)$ 在 $H^1(0,l)$ 是一致有界的. 用 $\bar{u}$ 乘以式 (5.1.8) , 在 $(0,l)$ 上积分并取实部, 得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|u\|^2+3\delta p_1^2\varepsilon\|u_\xi\|^2+\varepsilon\int(|u|^2(1-|u|^2))=0. \tag{5.1.9}$$

注意到 $|u(\xi,t)|_{L^\infty}\leqslant 1$ 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|u\|^2+6p_1^2\delta\varepsilon\|u_\xi\|^2\leqslant 0.$$

这表明

$$\|u(t)\|^2 \leqslant \|u_0\|^2 \leqslant l. \tag{5.1.10}$$

用 $-\partial_{\xi\xi}\bar{u}$ 乘以式 (5.1.8), 在 $(0,l)$ 中积分并取实部, 我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|u_\xi\|^2 + 3p_1^2\delta\varepsilon\|u_{\xi\xi}\|^2 + \varepsilon\|u_\xi\|^2 + Re(\varepsilon+3\mathrm{i})\int |u|^2 u\bar{u}_{\xi\xi}\mathrm{d}\xi = 0, \tag{5.1.11}$$

表明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|u_\xi\|^2 + 6p_1^2\delta\varepsilon\|u_{\xi\xi}\|^2 + 2\varepsilon\|u_\xi\|^2 \leqslant 6\sqrt{9+\varepsilon^2}\int |u|^2|u_\xi|^2\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant 6\sqrt{9+\varepsilon^2}\|u\|_{L^4}^2\|u_\xi\|_{L^4}^2 \leqslant 3p_1^2\delta\varepsilon\|u_{\xi\xi}\|^2 + c\|u\|^{10} \leqslant 3p_1^2\delta\varepsilon\|u_{\xi\xi}\|^2 + cl^5.$$

这里用到了 Gagliardo-Nirenberg 不等式, 从而得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|u_\xi\|^2 + 3p_1^2\delta\varepsilon\|u_{\xi\xi}\|^2 + 2\varepsilon\|u_\xi\|^2 \leqslant cl^{10}.$$

利用 Gronwall 不等式, 我们有

$$\|u_\xi\|^2 \leqslant \|u_{0\xi}\|^2\mathrm{e}^{-2\varepsilon t} + \frac{cl^5}{2\varepsilon} \tag{5.1.12}$$

和

$$\int_t^{t+r} |u_{\xi\xi}|^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{2\varepsilon\|u_{0\xi}\|^2 + cl^5}{3p_1^2\varepsilon^2\delta}. \tag{5.1.13}$$

从式 (5.1.11) 和式 (5.1.13) 得到 $u(\xi,t)$ 在相空间内对任意的 $t\in[0,T)$, $H^1(0,l)$ 中是一致有界的. (i) 得到证明.

结合式 (5.1.11) 和式 (5.1.13), (ii) 也得到证明.

最后, 我们证明 (iii).

用 $-\partial_{\xi^4}\bar{u}$ 乘式 (5.1.8), 在 $(0,l)$ 上积分并取实部, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|u_{\xi\xi}\|^2 + 6p_1^2\varepsilon\delta\|u_{\xi^3}\|^2 + 2\varepsilon\|u_{\xi\xi}\|^2 = 2\mathrm{Re}(\varepsilon+3\mathrm{i})\int |u|^2 u\bar{u}_{\xi^4}\mathrm{d}\xi, \tag{5.1.14}$$

利用 Sobolev 不等式

$$|\int |u|^2 u\bar{u}_{\xi^4}\mathrm{d}\xi| \leqslant 3|\int |u|^2|u_\xi||u_{\xi^3}|\mathrm{d}\xi| \leqslant 3\|u_\xi\|\|u_{\xi^3}\| \leqslant \frac{p_1^2\delta\varepsilon}{2\sqrt{9+\varepsilon^2}}\|u_{\xi^3}\|^2 + c(\varepsilon,\|u_{0\xi}\|),$$

于是利用式 (5.1.14) 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|u_\xi\|^2 + 2\varepsilon\|u_{\xi\xi}\|^2 \leqslant 2\sqrt{9+\varepsilon^2}c(\varepsilon,\|u_{0\xi}\|). \tag{5.1.15}$$

利用一致 Gronwall 不等式, 我们得出：当 t 足够大时

$$\|u_{\xi\xi}(\xi,t+r)\|^2 \leqslant \left(2\sqrt{9+\varepsilon^2}c(\varepsilon,\|u_{0\xi}\|)r+\frac{2\varepsilon\|u_{0\xi}\|^2+cl^5}{2p_1^2r\varepsilon^2}\right)\mathrm{e}^{-2\varepsilon}, \tag{5.1.16}$$

表明由式 (5.1.8) 定义的算子 $S(t)$ 将 $H^1(0,l)$ 的有界集映射到 $H^2(0,l)$ 中的有界集, 因此它在 H^1 中是紧的. (iii) 证毕.

5.1.2 扰动 DSI 方程的同宿异宿流

在这一节中, 我们考虑具周期边界条件的扰动 DSI 方程. 利用不动圈和不动点的双曲性分析, 我们得到同宿异宿解的存在性. 利用降维法和广义的 Hirota 方法, 给出同宿和异宿解的精确表示, 并得到同宿异宿流的凝聚保持性.

由于扰动的 DSI 方程是一个耗散型系统, 可以转化为非局部耗散的 Ginzburg-Landau 方程, 当初值适当小时, 整体吸引子的存在性已经得到证明 [5], 下面我们将证明整体吸引子包含这些同宿和异宿流.

我们考虑扰动 DSI 方程 (5.1.1)、(5.1.2). 显然, $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\theta)},0)$ 是式 (5.1.1)、式 (5.1.2) 的一个不动环, $(a_0+\mathrm{i}b_0,a_0^2+b_0^2)$ 是复平面 z 上环 $|z|^2=1$ 的一个不动点. 不失一般性, 我们设 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}=a_0+\mathrm{i}b_0$, 则 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0},1)$ 是不动点. 由于 a_0,b_0 的任意性, 表明有无穷多个不动环 $(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a^2t+\theta)},0)$ 存在, 说明不动环和不动点具有凝聚保持性.

下面, 我们将证明 $Z=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\theta)},0)$ 是式 (5.1.1)、式 (5.1.2) 的双曲不动点.

设 $q(x,y,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\theta)}u(x,y,t)$ 并代入式 (5.1.1) 中, 得到

$$\mathrm{i}u_t+\Delta u=-(|u|^2-1)u+\phi u+\mathrm{i}\varepsilon[\delta\Delta u+(|u|^2-1)u] \tag{5.1.17}$$

且 (1,0) 是式 (5.1.1)、式 (5.1.17) 的不动点. 令 $u=u_1+\mathrm{i}u_2$, 其中 u_1 和 u_2 为实函数. 将 $u_1+\mathrm{i}u_2$ 代入式 (5.1.1)、式 (5.1.2) 中并分别取实部和虚部, 得到

$$\begin{aligned}&u_{1t}-\varepsilon\delta\Delta u_1+\Delta u_2=\varepsilon|u|^2u_1-(|u|^2-1)u_2-\varepsilon u_1+\varphi u_2,\\&u_{2t}-\Delta u_1-\varepsilon\delta\Delta u_2=(|u|^2-1)u_1+\varepsilon|u|^2u_2-\varepsilon u_2-\varphi u_1,\\&\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=2(|u|^2)_{xx}.\end{aligned} \tag{5.1.18}$$

在不动点 (1,0) 处线性化式 (5.1.18), 得

$$\begin{aligned}&u_{1t}=\varepsilon\delta\Delta u_1-\Delta u_2+2\varepsilon u_1,\\&u_{2t}=\Delta u_1+\varepsilon\delta\Delta u_2+2u_1-\varphi,\\&\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=4u_{1xx},\end{aligned} \tag{5.1.19}$$

取

$$L_\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon\delta\Delta+2\varepsilon & -\Delta\\ \Delta+2-4\Box^{-1}\partial_x^2 & \varepsilon\delta\Delta\end{pmatrix}$$

这里 □ 指波算子 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. 我们考虑 L_ε 的谱. 已知 L_ε 的特征值是

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2}=&\varepsilon(1-\delta(k_1^2(n)+k_2^2(n)))\\&\pm\sqrt{\varepsilon^2+2(k_1^2(n)+k_2^2(n))\left(1+\frac{2k_1^2(n)}{k_2^2(n)-k_1^2(n)}\right)-(k_1^2(n)+k_2^2(n))^2},\end{aligned}\tag{5.1.20}$$

其中, $k_1(n)=\dfrac{2n\pi}{l_1},k_2(n)=\dfrac{2n\pi}{l_2}(k_1(n)<k_2(n))$ 分别是区域 $\omega=(0,l_1)\times(0,l_2)$ 内具周期边界算子 $-\Delta$ 在 x 方向和 y 方向的特征值. 为使 $\lambda_1>0$ 和 $\lambda_2<0$, 必须有

$$\begin{aligned}\varepsilon^2+2(k_1^2(n)+k_2^2(n))\left(1+\frac{2k_1^2(n)}{k_2^2(n)-k_1^2(n)}\right)-(k_1^2(n)+k_2^2(n))^2\\>\varepsilon^2(1-\delta(k_1^2(n)+k_2^2(n)))^2,\end{aligned}\tag{5.1.21}$$

于是, 当 ε 很小时

$$0<n<\frac{l_1l_2\sqrt{(1+\delta\varepsilon^2)l_1^2+(1-\delta\varepsilon^2)l_2^2}}{\pi\sqrt{2(l_1^4-l_2^4)(1+\delta^2\varepsilon^2)}},\tag{5.1.22}$$

从而我们有下面的性质.

性质 5.1.2 如果 n 满足式 (5.1.22), 扰动系统式 (5.1.1)、式 (5.1.2) 存在一个双曲不动圈 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\theta)},0)$, 且 n 与 t 无关.

证明 根据线性算子半群理论 (Babin S V et al. 1998), 如果 n 满足式 (5.1.22), 则在不动点 Z 的邻域内算子 $S'(t)(z)$ 存在一个 n 维线性不变子空间 $E_+(Z)$ 和它的补空间 $E_-(Z)$, 其中 $E=H^1(\omega)$. 更进一步, 从上述讨论我们可知: 谱 $\sigma(S'(t)(Z))=\mathrm{e}^{\lambda_1t},\mathrm{Re}\lambda_1t>0$ 及 $\mathrm{e}^{\lambda_2t},\mathrm{Re}\lambda_2t<0$ 对于 $t>0$, 于是 $DS(t)$ 的谱与单位环不相交, 因此 Z 是 $S(t)$ 的双曲不动点.

注 对于不动点 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0},1)$, 我们设 $q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}u,\varphi=1+\varphi_0$ 并记 φ_0 为 φ. 于是方程 (5.1.1) 变化时式 (5.1.17) 和式 (5.1.2) 不变, 而不动点 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0},1)$ 变为 $(1,0)$. 于是性质 5.1.2 对于不动点 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0},1)$ 成立.

从性质 5.1.2, 我们在 Z 处定义不稳定流形 $\mu_+(Z)$, 且有如下推论 (Guckenheimer J 1983, Constantin P 1985).

推论 5.1.3 $\mu_+(Z)\subset\mathcal{A}$ 且 $\mathcal{A}$ 的 Hausdorff 维数下界满足

$$\dim_H\mathcal{A}\geqslant n,$$

其中, $\mathcal{A}$ 是扰动 DSI 系统的整体吸引子, n 满足式 (5.1.22) 及 Z 是 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\theta)},0)$ 或者 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0},1)$.

我们将进一步给出特殊同宿和异宿流, 并证明整体吸引子至少包含这些流.

回到式 (5.1.1)∼ 式 (5.1.2), 利用变量变换

$$\xi = p_1 x + p_2 y, \qquad \varphi = \frac{2p_1^2}{p_1^2 - p_2^2}(|q|^2 - 1),$$

得到

$$\mathrm{i}q_t + (1 - \mathrm{i}\delta\varepsilon)(p_1^2 + p_2^2)q_{\xi\xi} = -(\alpha - \mathrm{i}\varepsilon)|q|^2 q + (\alpha - \mathrm{i}\varepsilon - 1)q, \tag{5.1.23}$$

其中, p_1, p_2 与第 4 章定义相同, $\alpha = \dfrac{p_2^2 + p_1^2}{p_2^2 - p_1^2} > 0$, 令 $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\theta)}u, p_2^2 = 2p_1^2$, 得

$$\mathrm{i}u_t + 3(1 - \mathrm{i}\delta\varepsilon)p_1^2 u_{\xi\xi} = -(3 - \mathrm{i}\varepsilon)(|u|^2 - 1)u, \tag{5.1.24}$$

在这种情况下, $|q_0(\xi)| = |u_0(\xi)|$ 和 q_0 是 2π 周期的.

取 $\delta = 1/3$, 从式 (5.1.24) 得

$$\frac{\mathrm{i}}{3 - \mathrm{i}\varepsilon}u_t + p_1^2 u_{\xi\xi} = -(|u|^2 - 1)u. \tag{5.1.25}$$

设 $t = \dfrac{3 + \mathrm{i}\alpha_1}{\beta_0^2}\tau, \xi = p_1\eta$, 其中 $\alpha_1 = \dfrac{\varepsilon}{\beta_0}, \beta_0 = \sqrt{9 + \varepsilon^2}$. 由式 (5.1.25) 得下列方程:

$$\mathrm{i}u_\tau + u_{\eta\eta} + (|u|^2 - 1)u = 0. \tag{5.1.26}$$

方程 (5.1.26) 有如下同宿轨解

$$u^{(j)} = \frac{1 + b_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}P\eta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\eta})\mathrm{e}^{\Omega_j\tau+\gamma} + b_2\mathrm{e}^{2\Omega_j\tau+2\gamma}}{1 + b_3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}P\eta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta})\mathrm{e}^{\Omega_j\tau} + b_4\mathrm{e}^{2\Omega_j\tau+2\gamma}}, \qquad j = 1, 2. \tag{5.1.27}$$

其中

$$b_1 = \frac{\mathrm{i}\Omega + P^2}{\mathrm{i}\Omega - P^2}b_3, \qquad b_2 = \left(\frac{\mathrm{i}\Omega + P^2}{\mathrm{i}\Omega - P^2}\right)^2 b_4,$$

$$b_4 = \frac{\Omega^2 + P^4}{\Omega^2}b_3^2, \quad \Omega_{1,2} = \pm|P|\sqrt{2 - P^2}, \quad P^2 < 2, \tag{5.1.28}$$

回到式 (5.1.1)∼ 式 (5.1.2), 我们最终得到

$$q^{(j)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\theta)}\frac{1 + b_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0(p_1x+p_2y)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_0(p_1x+p_2y)})\mathrm{e}^{\beta_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\Omega_j t+\gamma} + b_2\mathrm{e}^{2\beta_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\Omega_j t+2\gamma}}{1 + b_3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0(p_1x+p_2y)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_0(p_1x+p_2y)})\mathrm{e}^{\beta_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\Omega_j t+\gamma} + b_4\mathrm{e}^{2\beta_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\Omega_j t+2\gamma}},$$

$$\varphi^{(j)} = \frac{2p_1^2}{p_1^2 - p_2^2}(|q^{(j)}|^2 - 1), \qquad j = 1, 2 \tag{5.1.29}$$

其中, $\delta_0 = \dfrac{P}{p_1}, \arctan\theta_0 = \dfrac{-\varepsilon}{3}$.

方程 (5.1.29) 表明扰动的 DSI 有两簇同宿流. 事实上, 我们有

$$(q^{(1)},\varphi^{(1)})\to\left(\frac{\mathrm{i}\Omega+P^2}{\mathrm{i}\Omega-P^2}\right)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\theta)},0);(q^{(2)},\varphi^{(2)})\to(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\theta)},0),\quad t\to+\infty,\quad(5.1.30)$$

$$(q^{(2)},\varphi^{(2)})\to\left(\frac{\mathrm{i}\Omega+P^2}{\mathrm{i}\Omega-P^2}\right)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\theta)},0);(q^{(1)},\varphi^{(1)})\to(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\theta)},0),\quad t\to-\infty,\quad(5.1.31)$$

其中, ε 很小.

值得注意的是: 当 $\varepsilon=0$ 时, $\theta_0=0,\beta_0=3$. 设 $P=p_1$, 则有 $\delta_0=1$, 于是 $(q^{(1)},\varphi^{(1)}),(q^{(2)},\varphi^{(2)})$ 是两个同宿简解, $(a=1)$.

其次, 我们寻找异宿流. 在方程 (5.1.1)、(5.1.2) 中做变量变换 $\xi=p_1x+p_2y$, 并设 $q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}u,\phi=1+\dfrac{2p_1^2}{p_1^2-p_2^2}(|u|^2-1)$, 同时选取 $\delta=\dfrac{1}{3}$, 则式 (5.1.1)、式 (5.1.2) 就变成式 (5.1.17) 一样. 于是由式 (5.1.24), 我们得到异宿流

$$\begin{cases}q^{(k)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}\dfrac{1+b_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0(p_1x+p_2y)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_0(p_1x+p_2y)})\mathrm{e}^{\beta_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\Omega_kt+\gamma}+b_2\mathrm{e}^{2\beta_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\Omega_kt+2\gamma}}{1+b_3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0(p_1x+p_2y)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_0(p_1x+p_2y)})\mathrm{e}^{\beta_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\Omega_kt+\gamma}+b_4\mathrm{e}^{2\beta_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\Omega_kt+2\gamma}},\\ \varphi^{(k)}=1+\dfrac{2p_1^2}{p_1^2-p_2^2}(|q^{(k)}|^2-1),\\ k=1,2,\end{cases}\quad(5.1.32)$$

其中, $P,\Omega_{1,2},b_1,b_2,b_3,b_4$, 满足式 (5.1.28).

方程 (5.1.29) 表明扰动的 DSI 有两簇异宿流. 事实上, 如果 ε 足够小, 有

$$(q^{(1)},\varphi^{(1)})\to\left(\left(\frac{\mathrm{i}\Omega+P^2}{\mathrm{i}\Omega-P^2}\right)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0},1\right);(q^{(2)},\varphi^{(2)})\to(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0},1),t\to+\infty,\quad(5.1.33)$$

$$(q^{(2)},\varphi^{(2)})\to\left(\left(\frac{\mathrm{i}\Omega+P^2}{\mathrm{i}\Omega-P^2}\right)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0},1\right);(q^{(1)},\varphi^{(1)})\to(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0},1),t\to-\infty,\quad(5.1.34)$$

注意到 $\left|\dfrac{\mathrm{i}\Omega+P^2}{\mathrm{i}\Omega-P^2}\right|=1$, 得到 $\left(\dfrac{\mathrm{i}\Omega+P^2}{\mathrm{i}\Omega-P^2}\right)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}$ 是扰动的 DSI 方程的另一个不动点. 因此式 (5.1.33)~ 式 (5.1.34) 表明异宿流存在.

如同宿解一样, 当 $\varepsilon=0$ 时, $\theta_0=0,\beta_0=3$. 设 $P=p_1$, 有 $\delta_0=1$, 则 $(q^{(1)},\varphi^{(1)}),(q^{(2)},\varphi^{(2)})$ 是两个不同的异宿简解.

结合上述讨论, 我们有如下定理.

定理 5.1.4 对于扰动的 DSI 系统, DSI 方程的不动环 $(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a^2t+\theta)},0)$ 和不动点 $(a_0+\mathrm{i}b_0,a_0^2+b_0^2)$ 已经分别凝聚到扰动的 DSI 的不动圈 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\theta)},0)$ 和不动点 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0},1)$ 上. 随着不动环（点）的凝聚, 同宿筒 (5.1.11) 和异宿筒 (5.1.13) 凝聚到式 (5.1.29) 和式 (5.1.32).

最后有如下定理.

定理 5.1.5 在 ε 的扰动下, 两个精确的同宿流 $(q^{(1)},\phi^{(1)})$ 和异宿流 $(q^{(1)},\phi^{(1)})$ 都包含在扰动系统的吸引子里.

证明 注意到式 (5.1.29) 中的 $(q^{(1)},\varphi^{(1)})$ 和式 (5.1.32) 中的 $(q^{(1)},\phi^{(1)})$ 分别是不动环 $(\mathrm{e}^{1(t+\theta)},0)$ 和不动点 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0},1)$ 的不稳定流形, 如果我们能证明 $q_0(\xi)$ 满足条件 $|q_0(\xi)|_{L^\infty}<1$, 则可立即从上面的推论中获得定理的证明.

事实上, $(q^{(1)}(t),\phi^{(1)}(t))\in\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 是当 $t\to\pm\infty$ 时以 1 为界. 因此它是一致 L^∞ 有界的. 下面我们证明 $|q_0(\xi)|<1$,

$$|q_0(\xi)|=\left|\frac{1+2b_1\cos\delta_0\xi+b_2}{1+2b_3\cos\delta_0\xi+b_4}\right|.$$

这里我们选取 $\gamma=0,b_3=1$. 从式 (5.1.42) 得

$$|q_0|^2=\frac{[(P^4-\Omega^2)(1+b_4)-2(\Omega^2+P^4)\cos P\eta]^2+4\Omega^2P^4(b_4-1)^2}{[(P^4-\Omega^2)(1+b_4)+2(P^4-\Omega^2)\cos P\eta]^2+4\Omega^2P^4(1+b_4-2\cos P\eta)^2},$$

则 $|q_0|<1$ 当且仅当下式为真

$$2b_4P^4-3P^4\cos P\eta-3b_4P^4\cos P\eta+\Omega^2\cos P\eta+b_4\Omega^2\cos P\eta>0.$$

对于 $P\eta\in(0,2\pi)$, 求解不等式得到

$$\frac{1+b_4}{2+3b_4}<P^2<\frac{1+b_4}{2+b_4}.$$

注意到 $b_4>1$, 于是我们能限制式 (5.1.28) 中的 $0<P<1$, 使得 $|q_0|<1$.

注 同宿流 $(q^{(1)}(t),\phi^{(1)}(t))$ 对于半群 $S(t)$ 流是完全轨, 而 Z 是扰动的 DSI 系统的不动环. 于是, 完全轨包含在吸引子中.

5.2 扰动 $(-,+)$ 型 DS 方程的吸引子及同宿异宿流

扰动的 DSII 方程

$$\begin{cases}\mathrm{i}q_t+q_{xx}-q_{yy}=2|q|^2q+q\varphi+\mathrm{i}\varepsilon(q_{xx}+q_{yy}+2|q|^2q-2q),\\ \varphi_{xx}+\varphi_{yy}=-4(|q|^2)_{xx}\end{cases}\tag{5.2.1}$$

及其边界条件:

$$q(x,y,t)=q(x+l_1,y+l_2,t);\quad \varphi(x,y,t)=\varphi(x+l_1,y+l_2,t),$$

其中, $\Omega=(0,l_1)\times(0,l_2)$, $l_1\langle l_2,\varepsilon\rangle 0$ 足够小.

引入变量变换:

$$\xi = p_1 x + p_2 y, \qquad \varphi = -\frac{4p_1^2}{p_1^2+p_2^2}(|u|^2-1), \tag{5.2.2}$$

其中, $p_1 = \dfrac{n\pi}{l_1}$, $p_2 = \dfrac{n\pi}{l_2}$. 注意到 $l_1 < l_2$, 有 $p_1 > p_2$.

因此, 扰动的 DSII 方程 (5.2.1) 可以化为如下形式的非局部的 Ginzburg-Landau 系统:

$$\begin{cases} \mathrm{i}q_t+(1-\mathrm{i}\varepsilon)(p_1^2+p_2^2)q_{\xi\xi}=2\left(1-\dfrac{2p_1^2}{p_1^2+p_2^2}+\mathrm{i}\varepsilon\right)|q|^2q+2\left(\dfrac{2p_1^2}{p_1^2+p_2^2}-\mathrm{i}\varepsilon\right)q+2p_2^2u_{\xi\xi}, \\ q(\xi+l,t)=q(\xi,t), \\ q(\xi,0)=q_0(\xi), \end{cases} \tag{5.2.3}$$

其中, $l = l_1p_1 + l_2p_2$. 设 $q = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}u$, 则式 (5.2.3) 可写为

$$\begin{cases} u_t-[\varepsilon(p_1^2+p_2^2)-\mathrm{i}(p_1^2-p_2^2)]u_{\xi\xi}=2\left[\varepsilon-\mathrm{i}\left(1-\dfrac{2p_1^2}{p_1^2+p_2^2}\right)\right](|u|^2-1)u, \\ u(\xi+l,t)=u(\xi,t), \\ u(\xi,0)=u_0(\xi). \end{cases} \tag{5.2.4}$$

设

$$A=-[\varepsilon(p_1^2+p_2^2)-\mathrm{i}(p_1^2-p_2^2)]\frac{\partial^2}{\partial\xi^2},$$

$$F(u)=2\left[\varepsilon-\mathrm{i}\left(1-\frac{2p_1^2}{p_1^2+p_2^2}\right)\right](|u|^2-1)u,$$

则式 (5.2.4) 可写为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au=F(u),$$

容易证明 A 是一个扇形算子.

用类似于扰动 DSI 方程的讨论, 我们有以下结论:

引理 5.2.1　对 $u_0 \in V^j$, 扰动的 DSII 方程存在一个唯一解 $u(t)$ 定义在最大时间间隙 $[0,T_j), T_j = T_j(u_0) > 0$ 中

$$u(t) \in C([0,T_j),V^j)\bigcap C((0,T_j),V^{j+1}).$$

其中, $V^j = D(A^{1/2})$.

引理 5.2.2　若 $u_0(\xi) \in H^1(0,l)$ 和 $|u_0(\xi)| < 1$, 则由式 (5.2.4) 定义的解算子半群 $S(t)$ 在 $H^1(0,l)$ 中存在一个整体吸引子 $\mathcal{A}$.

引理 5.2.3 扰动的 DSII 方程 (5.2.1) 有一个不动环 $(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}, 0)$ 和不动点 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, -2)$, 它们对于解算子 $S(t)$ 是双曲的. $\mathcal{A}$ 的不稳定流形 $\mu_+\{Z_j\} \subset \mathcal{A}$ 和 Hausdorff 维数下界满足

$$\dim_H \mathcal{A} \geqslant n,$$

其中, n 满足 $0 < n < \dfrac{2l_1 l_2}{\pi\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}$.

下面, 我们将证明整体吸引子包含特殊的同宿异宿结构.

由式 (5.2.4), 得

$$\frac{p_1^2 + p_2^2}{2[(p_1^2 - p_2^2) - \mathrm{i}\varepsilon(p_1^2 + p_2^2)]}\mathrm{i}u_t + \frac{p_1^2 + p_2^2}{2}u_{\xi\xi} = -(|u|^2 - 1)u. \tag{5.2.5}$$

令 $\tau = \dfrac{2[(p_1^2 - p_2^2) - \mathrm{i}\varepsilon(p_1^2 + p_2^2)]}{p_1^2 + p_2^2}t$, $\eta = \sqrt{\dfrac{2}{p_1^2 + p_2^2}}\xi$, 由式 (5.2.5) 得

$$\mathrm{i}u_\tau + u_{\eta\eta} + (|u|^2 - 1)u = 0. \tag{5.2.6}$$

设 $u = \dfrac{G}{F}$, 其中

$$\begin{cases} G = 1 + b_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\eta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}K\eta})\mathrm{e}^{\Omega_j\tau + \gamma} + b_2\mathrm{e}^{2\Omega_j\tau + 2\gamma}, \\ F = 1 + b_3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\eta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}K\eta})\mathrm{e}^{\Omega_j\tau + \gamma} + b_4\mathrm{e}^{2\Omega_j\tau + 2\gamma}. \end{cases}$$

参数 $b_1, b_2, b_3, b_4, \Omega_1, \Omega_2$ 满足关系式

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{\mathrm{i}\Omega + K^2}{\mathrm{i}\Omega - K^2}b_3, \quad b_2 = \left(\dfrac{\mathrm{i}\Omega + K^2}{\mathrm{i}\Omega - K^2}\right)^2 b_4, \quad b_4 = \dfrac{\Omega^2 + K^2}{\Omega^2}b_3^2, \\ \Omega^2 = p^2(2 - K^2) \quad \Omega_{1,2} = \pm|\Omega|, \qquad K^2 < 2, \end{cases} \tag{5.2.7}$$

因此, 式 (5.2.6) 有如下形式的解:

$$u_j(\eta, \tau) = \frac{1 + b_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\eta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}K\eta})\mathrm{e}^{\Omega_j\tau + \gamma} + b_2\mathrm{e}^{2\Omega_j\tau + 2\gamma}}{1 + b_3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\eta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}K\eta})\mathrm{e}^{\Omega_j\tau + \gamma} + b_4\mathrm{e}^{2\Omega_j\tau + 2\gamma}}, \qquad j = 1, 2. \tag{5.2.8}$$

回到式 (5.2.1), 我们最终得到同宿流解

$$\begin{cases} q_j(x, y, t) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\dfrac{1 + b_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta(p_1x + p_2y)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta(p_1x + p_2y)})\mathrm{e}^{\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\Omega_j t + \gamma} + b_2\mathrm{e}^{2\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\Omega_j t + 2\gamma}}{1 + b_3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta(p_1x + p_2y)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta(p_1x + p_2y)})\mathrm{e}^{\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\Omega_j t + \gamma} + b_4\mathrm{e}^{2\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\Omega_j t + 2\gamma}}, \\ \varphi_j(x, y, t) = -\dfrac{4p_1^2}{p_1^2 + p_2^2}(|q_j|^2 - 1), \qquad j = 1, 2 \end{cases} \tag{5.2.9}$$

和异宿流解

$$\begin{cases} q_k(x,y,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{1+b_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta(p_1x+p_2y)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta(p_1x+p_2y)})\mathrm{e}^{\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\Omega_jt+\gamma}+b_2\mathrm{e}^{2\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\Omega_jt+2\gamma}}{1+b_3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta(p_1x+p_2y)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta(p_1x+p_2y)})\mathrm{e}^{\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\Omega_jt+\gamma}+b_4\mathrm{e}^{2\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\Omega_jt+2\gamma}}, \\ \varphi_k(x,y,t)=-2-\dfrac{4p_1^2}{p_1^2+p_2^2}(|q_k|^2-1), \qquad j=1,2,\quad k=3,4, \end{cases} \tag{5.2.10}$$

其中, $\delta=K\sqrt{\dfrac{2}{p_1^2+p_2^2}}$, $\rho_0=\dfrac{2}{p_1^2+p_2^2}\sqrt{(p_1^2-p_2^2)^2+\varepsilon^2(p_1^2+p_2^2)}$, $\theta_0=\arctan\dfrac{\varepsilon(p_1^2+p_2^2)}{p_1^2-p_2^2}$.

由式 (5.2.9), 得到:

当 $t\to+\infty$

$$(q_1,\varphi_1)\to\left(\left(\frac{\mathrm{i}\Omega_1+K^2}{\mathrm{i}\Omega_1-K^2}\right)^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t},0\right),\qquad (q_2,\varphi_2)\to(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t},0);$$

当 $t\to-\infty$

$$(q_1,\varphi_1)\to(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t},0)\qquad (q_2,\varphi_2)\to\left(\left(\frac{\mathrm{i}\Omega_2+K^2}{\mathrm{i}\Omega_2-K^2}\right)^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t},0\right).$$

注意到

$$\left|\frac{\mathrm{i}\Omega_j+K^2}{\mathrm{i}\Omega_j-K^2}\right|^2=1,\qquad j=1,2,$$

类似于未扰动 DSII 方程的讨论, 可见不动环 $\left(\left(\dfrac{\mathrm{i}\Omega_j+K^2}{\mathrm{i}\Omega_j-K^2}\right)^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t},0\right)$ 和 $(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t},0)$ 是一样的. 表明式 (5.2.9) 是未扰动 DSII 的同宿流解.

由式 (5.2.10), 得到:

当 $t\to+\infty$

$$(q_3,\varphi_3)\to\left(\left(\frac{\mathrm{i}\Omega_1+K^2}{\mathrm{i}\Omega_1-K^2}\right)^2(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),-2\right),$$
$$(q_3,\varphi_4)\to(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),-2).$$

当 $t\to-\infty$

$$(q_3,\varphi_3)\to((\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),-2),$$
$$(q_4,\varphi_4)\to\left(\left(\frac{\mathrm{i}\Omega_2+K^2}{\mathrm{i}\Omega_2-K^2}\right)^2(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),-2\right).$$

注意到

$$\left|\frac{\mathrm{i}\Omega_j+K^2}{\mathrm{i}\Omega_j-K^2}\right|^2=1,\qquad j=1,2,$$

于是, $\left(\left(\frac{\mathrm{i}\Omega_j+K^2}{\mathrm{i}\Omega_j-K^2}\right)^2(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),-2\right)$ 是式 (5.2.1) 另一个不动点, 它与 $((\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),-2)$ 不同. 表明未扰动的 DSII 有异宿流解 (5.2.10).

结合上面讨论结果, 我们有如下定理.

定理 5.2.4 在 ε 扰动下, 未扰动 DSII 方程的同宿异宿流解具有保持性, 而且包含在扰动的 DSII 方程整体吸引子中.

5.3 广义 (+,+) 型 DS 方程整体吸引子

广义 Davey-Stewartson 系统

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\chi u-\beta|u|^2u+\gamma\varphi u, \tag{5.3.1}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}(|u|^2), \tag{5.3.2}$$

带边界条件

$$u(t,x,y)=0,\quad \varphi(t,x,y)=0,\quad t\geqslant 0,(x,y)\in\partial\Omega \tag{5.3.3}$$

及初始条件

$$u(0,x,y)=u_0(x,y),\qquad (x,y)\in\Omega, \tag{5.3.4}$$

其中, $a=a_1+\mathrm{i}a_2,b=b_1+\mathrm{i}b_2,\beta=\beta_1+\mathrm{i}\beta_2,\gamma=\gamma_1+\mathrm{i}\gamma_2,\chi=\chi_1+\mathrm{i}\chi_2$ 是复值常数,$\Omega\in\mathbf{R}^2$ 是一个光滑有界区域.$u(t,x,y)$ 表示复振幅, $\varphi(t,x,y)$ 为实值函数. 为保证 φ 的唯一性, 要求 $\int_\Omega\varphi(t,x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

由式 (5.3.2) 和式 (5.3.3), 我们用 u 把 φ 求解出来

$$\varphi=-(-\Delta)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial y^2}|u|^2\triangleq E(|u|^2), \tag{5.3.5}$$

这里 $(-\Delta)^{-1}$ 是 Laplace 算子对应于 Dirichlet 边界条件的逆. 于是式 (5.3.1)、式 (5.3.2) 可化为一个非局部非线性 Schrödinger 型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\chi u-\beta|u|^2u-\gamma uE(|u|^2),\quad t>0,(x,y)\in\Omega, \tag{5.3.6}$$

$$u(t,x,y)=0,\qquad t\geqslant 0,(x,y)\in\partial\Omega, \tag{5.3.7}$$

$$u(0,x,y)=u_0(x,y),\qquad (x,y)\in\Omega. \tag{5.3.8}$$

由 Sobolev 不等式, 存在一个极小数 $C(p)>0,(1<p<\infty)$ 使得

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|_p \leqslant C(p)\|\Delta u\|_p, \qquad u\in C_0^\infty(\Omega),$$

其中, $\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(\Omega)$ 的范数. 于是

$$\|E(u)\|_p \leqslant C(p)\|u\|_p, \qquad u\in C_0^\infty(\Omega), \tag{5.3.9}$$

且 $E=-(\Delta)^{-1}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 可以延拓为 $L^p(\Omega)(1<p<\infty)$ 上的线性有界算子, 其范数为 $C(p)$. 事实上, $\dfrac{\partial^4}{\partial y^2}$ 与 Δ 在 $W^{4,p}(\Omega)$ 中可交换, $(-\Delta)^{-1}$ 从 $L(p)$ 到 $W^{2,p}(\Omega)$ 是线性有界的, 所以 $\bar{E}=\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(-\Delta)^{-1}$ 就是 E 在 $L^p(\Omega)$ 的延拓, 且范数为 $\|\bar{E}\|_{L(L^p(\Omega))}=C(p)$.

设参数满足如下条件:

$$[H]\quad \kappa=\min\{a_1,b_1\}>0, \qquad \beta_1>0,\beta_1+C(2)\gamma_1>0,\chi_1>0,$$

其中, $W^{s,p}(\Omega)$ 和 $W_0^{s,p}(\Omega)$ 表示通常的 Sobolev 空间,$H^s(\Omega)=W^{s,2}(\Omega)$,$H_0^s(\Omega)=W_0^{s,2}(\Omega)$, $\|\cdot\|_{s,p}$ 是 $W^{s,p}(\Omega)$ 的模, $\|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{0,p}$, $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{0,2}$, $\bar{A}$ 为 A 的复共轭, C 是公共常数.

5.3.1 整体解的存在性

Davey-Stewartson 系统可表示为如下形式

$$u_t+L_p u=f(u), \qquad u(0)=u_0 \tag{5.3.10}$$

其中

$$L_p=-a\frac{\partial^2}{\partial x^2}-b\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

是 $X_p=L^p(\Omega)$ 上的微分算子, 其定义域为 $D(L_p)=W^{2,p}\cap W_0^{1,p}(\Omega)$, 且

$$f(u)=\chi u-\beta|u|^2u-\gamma uE(|u|^2).$$

显然, 在假设 $[H]$ 下, 谱位于半平面 $\{z|\mathrm{Re}z\geqslant\omega\}(\omega>0)$. L_p 的符号是 $L(\xi)=-a\xi_1^2-b\xi_2^2$, 其实部 $\mathrm{Re}L(\xi)\leqslant-\kappa|\xi|^2$. 于是 $L(\xi)$ 是强椭圆多项式, 且 $-L_p=-L\left(\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x},\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ 在 X_p 上生成一个有界解析半群 e^{-L_pt} . 所以我们可以定义 L_p 的分数次幂 L_p^α, 其定义域为 $X_p^\alpha=D(L_p^\alpha),\alpha>0$. 半群 e^{-L_pt} 满足以下性质

$$\|\mathrm{e}^{-L_pt}u_0\|_{X_p^\alpha}\leqslant M_\alpha\mathrm{e}^{-\omega t}\|u_0\|_{X_p^\alpha}, \qquad \forall u_0\in X_p^\alpha, t\geqslant 0, \tag{5.3.11}$$

$$\|e^{-L_p t}u_0\|_{X_p^\alpha} \leqslant M_\alpha t^{-\alpha}e^{-\omega t}\|u_0\|_{X_p}, \qquad \forall u_0 \in X_p^\alpha, t \geqslant 0, \tag{5.3.12}$$

对某个 $\omega > 0$ 和 $M_\alpha > 0$. 当 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$W_0^{2\alpha,p}(\Omega) \subset D(L_p^\alpha) \subset W^{2\alpha,p}(\Omega), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2\alpha,p}(\Omega) = D(L_p^\alpha), \qquad \frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

抽象的 Cauchy 问题 (5.3.10) 可等价地表示成积分形式

$$u(t) = e^{-L_p t}u_0 + \int_0^t e^{-L_p(t-s)}f(u(s))ds. \tag{5.3.13}$$

令 $\alpha_1 = \dfrac{2}{3p}$, $\alpha_2 = \max\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{p}\right\}$, 于是 $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$, 且

$$X_p^\alpha \hookrightarrow \begin{cases} L^{3p}(\Omega), & \alpha \geqslant \alpha_1, 1 < p < \infty, \\ L^\infty(\Omega), & \alpha \geqslant \alpha_2, p > 2; \text{or } \ \alpha > 2, 1 < p \leqslant 2, \\ L^q(\Omega), & \alpha \geqslant \alpha_2, 1 < q < \infty, 1 < p \leqslant 2. \end{cases}$$

因此, 从 X_p^α 到 X_p 非线性映射 $f(u)$ 对 $\alpha \geqslant \alpha_1$ 是局部 Lipschitz 连续的, 并且

$$\|f(u)\|_{X_p} \leqslant C_\alpha(\|u\|_{X_p^\alpha} + \|u\|_{X_p^\alpha}^3), \tag{5.3.14}$$

$$\|f(u_1) - f(u_2)\|_{X_p} \leqslant C(\alpha, R)\|u_1 - u_2\|_{X_p^\alpha}.$$

当 $p > 2$ 对 $\alpha \geqslant \alpha_2$ 和当 $1 < p \leqslant 2$ 对 $\alpha > \alpha_2$, X_p^α 是一个代数, 且

$$\|f(u)\|_{X_p^\alpha} \leqslant C_\alpha(\|u\|_{X_p^\alpha} + \|u\|_{X_p^\alpha}^3). \tag{5.3.15}$$

对所有的 $u_1, u_2 \in X_p^\alpha$ 满足 $\|u_k\|_{X_p^\alpha} \leqslant R, k = 1, 2$. 特别 $f(u)$ 在 $D(L_p^j)$ 上是 C^∞ 映射, $j \geqslant 1$ 是整数.

定理 5.3.1 设 $\alpha_1 = \dfrac{2}{3p} \leqslant \alpha < 1, u_0 \in X_p^\alpha$, 则

(1) 式 (5.3.10) 存在一个唯一解 $u \in C([0, t_{\max}); X_p^\alpha) \cap C^1((0, t_{\max}); X_p)$, 或者 $t_{\max} = +\infty$ 或者 $t_{\max} < +\infty$, 且 $\lim\limits_{t \to t_{\max}} \|u(t)\|_{X_p^\alpha} = +\infty$.

(2) 进一步有 $u \in \bigcap\limits_{j,k=1}^{\infty} C^k((0, t_{\max}); D(L_p^j))$.

证明 (1) 可以直接从经典存在唯一性定理推出.

由 (1) 可知, 对任意的 $T, 0 < T < t_{\max}$,

$$\|u(t)\|_{X_p^\alpha} \leqslant C(T), \quad \|f(u(t))\|_{X_p} \leqslant C(T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

由式 (5.3.10) 得 $L_pu(t) \in C((0,t_{\max});X_p)$, 且对任意 $0<\delta<T$

$$\|L_pu(t)\|_{X_p} \leqslant C_1(\delta,T), \qquad \delta\leqslant t\leqslant T.$$

利用式 (5.3.11)、式 (5.3.14) 和常数变易公式

$$u(t)=\mathrm{e}^{-L_p(t-\delta)}u(\delta)+\int_\delta^t \mathrm{e}^{-L_p(t-s)}f(u(s))\mathrm{d}s, \qquad \delta\leqslant t\leqslant T,$$

我们可直接证明

$$\left\|\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}u(t)\right\|_{X_p}, \quad \|L_p^ju(t)\|_{X_p}\leqslant C_j(\delta,T), \quad \delta\leqslant t\leqslant T, j\geqslant 1.$$

如果我们能获得 $\|u(t)\|_{X_p^\alpha}$ 的先验估计, 解就被整体定义了. 由于系统的光滑作用, 我们只需对适当的光滑初值得到其先验估计就可以了. 我们从 $p=2$ 开始.

引理 5.3.2　假设 $[H]$ 成立:

(1) 如果 $u_0\in X_2=L^2(\Omega)$, 则 $u(t)$ 只要存在, 它在 X_2 中仍有界. 若 $u(t)$ 整体存在, 则有一个 $C_1=C_1(\beta_1,\gamma_1,\chi_1,\Omega)>0$ 和 $t_0(R)$ 使得只要 $\|u_0\|\leqslant R$ 就有 $\|u(t)\|\leqslant C_1$, $\forall t\geqslant t_0(R)$.

(2) 如果 $u_0\in X_2^{1/2}=H_0^1(\Omega)$, 则 $u(t)$ 只要存在, 它在 $X_2^{1/2}$ 中仍有界. 若 $u(t)$ 整体存在, 则有一个 $C_2=C_2(\beta_1,\gamma_1,\chi_1,\Omega)>0$ 和 $t_1(R)>0$ 使得 $\|\nabla u(t)\|^2\leqslant C_2$, $\forall t\geqslant t_1(R)$.

证明　首先证明 (1). 用 $\bar{u}$ 乘以式 (5.3.6) 并在 Ω 积分再取实部, 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+a_1\|u_x\|^2+b_1\|u_y\|^2\\&=\chi_1\|u\|^2-\beta_1\|u\|_4^4-\gamma_1\int|u|^2E(|u|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{5.3.16}$$

注意到

$$\int|u|^2E(|u|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int|[(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}|u|^2]_y|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0,$$

$$\int|u|^2E(|u|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\||u|^2\|\|E(|u|^2)\|\leqslant C(2)\||u|^2\|^2=C(2)\|u\|_4^4,\tag{5.3.17}$$

我们有

$$\beta_1\|u\|_4^4-\gamma_1\int|u|^2E(|A|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant -K\|u\|_4^4.\tag{5.3.18}$$

其中, 当 $\gamma_1\geqslant 0$ 时 $K=\beta_1>0$, 当 $\gamma_1<0$ 时,$K=\beta_1+C(2)\gamma_1>0$. 利用 Hölder 不等式

$$\chi_1\|u\|^2\leqslant\frac{1}{2}K\|u\|_4^4+C,\tag{5.3.19}$$

这里 C 只依赖于 β_1,γ_1,χ_1 和 Ω. 结合式 (5.3.16)~ 式 (5.3.19), 得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\kappa\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}K\|u\|_4^4\leqslant C. \tag{5.3.20}$$

与式 (5.3.19) 类似, $\|u\|^2\leqslant\frac{1}{2}K\|u\|_4^4+C$, 于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\|u\|^2\leqslant C.$$

由 Gronwall 不等式得到

$$\|u\|^2\leqslant\|u_0\|^2\mathrm{e}^{-t}+C(1-\mathrm{e}^{-t}), \tag{5.3.21}$$

因此存在一个 $t_0(R)>0$ 使得当 $t>t_0(R)$ 有 $\|u\|^2\leqslant 1+C$ 只要 $\|u_0\|\leqslant R$. (1) 得证.

进一步, 由式 (5.3.20) 和式 (5.3.21), 我们有

$$\begin{aligned}&2\kappa\int_t^{t+\tau}\|\nabla u(s)\|^2\mathrm{d}s+K\int_t^{t+\tau}\|u(s)\|_4^4\mathrm{d}s\\ \leqslant\ &Cr+\|u_0\|^2\mathrm{e}^{-t}+C(1-\mathrm{e}^{-t})\leqslant Cr+C,\end{aligned}$$

对一切的 $t>t_0(R),r>0$.

其次, 我们证明 (2).

用 $-\Delta\bar{u}$ 乘以式 (5.3.6) 并在 Ω 上积分, 再取实部, 注意到

$$\mathrm{Re}\int au_{xx}\Delta\bar{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a_1\|\nabla u_x\|^2,\qquad \mathrm{Re}\int bu_{yy}\Delta\bar{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=b_1\|\nabla u_y\|^2,$$

我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|^2+a_1\|\nabla u_x\|^2+b_1\|\nabla u_y\|^2\\ =\ &\chi_1\|\nabla u\|^2-\mathrm{Re}\beta\int|u|^2A\Delta\bar{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\mathrm{Re}\gamma\int uE(|u|^2)\Delta\bar{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{5.3.22}$$

注意到

$$a_1\|\nabla u_x\|^2+b_1\|\nabla u_y\|^2\geqslant\kappa\|\Delta u\|^2,$$
$$\chi_1\|\nabla u\|^2\leqslant\frac{1}{6}\kappa\|\Delta u\|^2+C\|u\|^2,$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式 $\|u\|_6\leqslant C\|u\|^{1/3}\|\nabla u\|^{2/3},\forall u\in H_0^1(\Omega)$, 得

$$\begin{aligned}&|\mathrm{Re}\beta\int|u|^2u\Delta\bar{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}y|\leqslant|\beta|\|u\|_6^3\|\Delta u\|\\ \leqslant\ &C\|u\|\|\nabla u\|^2\|\Delta u\|\leqslant\frac{1}{6}\kappa\|\Delta u\|^2+C\|u\|^2\|\nabla u\|^4,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&|\mathrm{Re}\gamma \int uE(|u|^2)\Delta\bar{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}y| \leqslant |\gamma|\|u\|_6\|E(|u|^2)\|_3\|\Delta u\| \\
&\leqslant |\gamma|\|u\|_6^3\|\Delta u\| \leqslant C\|u\|\|\nabla u|^2\|\Delta u\| \\
&\leqslant \frac{1}{6}\kappa\|\Delta u\|^2 + C\|u\|^2\|\nabla u\|^4.
\end{aligned}
$$

因此我们得到

$$
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\kappa\|\Delta u\|^2 \leqslant C\|u\|^2 + C\|u\|^2\|\nabla u\|^4. \tag{5.3.23}
$$

引理 5.3.3 (一致 Gronwall 不等式) 设 $g(t),h(t),y(t)\geqslant 0$, 满足

$$
y'(t) \leqslant g(t)y(t) + h(t), \qquad \forall t \geqslant s.
$$

对 $r>0$, 若 $\int_t^{t+r} g(s)\mathrm{d}s \leqslant k_1, \int_t^{t+r} h(s)\mathrm{d}s \leqslant k_2, \int_t^{t+r} y(s)\mathrm{d}s \leqslant k_3$, 则有

$$
y(t+r) \leqslant \left(\frac{k_3}{\tau} + k_2\right)\mathrm{e}^{k_1}, \qquad \forall t \geqslant s.
$$

取 $y(t)=\|\nabla u(t)\|^2$, $g(t)=C\|u(t)\|^2\|\nabla u(t)\|^2$, $h(t)=C\|u(t)\|^2$, 于是利用引理第一部分, 对任意 $r>0, t>t_0(R)$

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+r} y(s)\mathrm{d}s \leqslant Cr + C \triangleq k_3, \\
&\int_t^{t+r} g(s)\mathrm{d}s \leqslant C\int_t^{t+r} \|\nabla u\|^2\mathrm{d}s \leqslant Cr + C \triangleq k_1, \\
&\int_t^{t+r} h(s)\mathrm{d}s \leqslant Cr \triangleq k_2,
\end{aligned}
$$

只要 $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant R$, 由一致 Gronwall 不等式, 我们得到

$$
y(t+r) = \|\nabla u(t+r)\| \leqslant \left(\frac{C}{r} + C + Cr\right)\mathrm{e}^{Cr+C}, \qquad t > t_0(R), r > 0.
$$

进一步, 由式 (5.3.23) 得

$$
\int_0^t \|\Delta u\|^2\mathrm{d}t \leqslant Ct + C, \qquad t \geqslant 0. \tag{5.3.24}
$$

引理证毕.

结合定理 5.3.1 和引理 5.3.2, 我们得到整体存在定理.

定理 5.3.4 设 $[H]$ 成立, $\alpha \geqslant \alpha_1 = \dfrac{2}{3p}$, 对任意 $u_0 \in X_p^\alpha$, 系统式 (5.3.6)、式 (5.3.7) 有唯一整体解

$$
u \in C([0,+\infty); X_p^\alpha) \bigcap \bigcap_{j,k=1}^{\infty} C^k((0,+\infty); D(L_p^j)).
$$

于是系统式 (5.3.6)、式 (5.3.7) 在 X_p^α 上定义了一个连续半群 $S(t)$.

证明 对 $u_0 \in X_2^{1/2}$, 从定理 5.3.1 和引理 5.3.2(2) 得知式 (5.3.6)、式 (5.3.7) 存在唯一整体有界解 $u \in C_b([0,+\infty); X_2^{1/2})$. 更进一步, $u \in \bigcap_{j,k=1}^{\infty} C^k((0,+\infty); D(L_2^j))$. 如果 $u_0 \in X_p^\alpha$, 则式 (5.3.6)、式 (5.3.7) 有唯一局部解 $u \in C([0,\delta]; X_p^\alpha) \bigcap \bigcap_{j,k=1}^{\infty} C^k((0,\delta], +\infty))$. 特别 $u(\delta) \in X_2^{1/2}$. 因此 $u(t)$ 存在直到 t 到无穷并在 $C_b([\delta,\infty); X_2^{1/2}) \cap \bigcap_{j,k=1}^{\infty} C^k$ $([\delta,+\infty); D(L_p^j))$ 中.

定理 5.3.5 设 $[H]$ 成立, $\alpha_1 = \dfrac{2}{3p}, \alpha_2 = \max\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{p}\right\}$ 和 $j \geqslant 1$. 则:

(1) $S(t)$ 有一个有界集 $\mathcal{B} \subset X_p^{\alpha_2}$ 吸收 $X_p^{\alpha_1}$ 和 $X_p^{\alpha_2}$ 中的有界子集的点;

(2) 对任意 $u_0 \in X_p^{\alpha_1}, \{S(t)u_0; t \geqslant t_0\}$ 在 $D(L_p^j)$ 中有界, 因此对任何 $t_0 > 0$ 在 $X_p^{\alpha_1}$ 中是相对紧的;

(3) 如果 $B(0,R) \subset X_p^{\alpha_2}, \bigcup_{t>t_j} S(t)B(0,R)$ 在 $D(L_p^j)$ 中一致有界, 因此对某些 $t_j > 0$ 在 $X_p^{\alpha_2}$ 中相对紧的.

证明 设 $B(0,R) \subset X_p^{\alpha_2}, u_0 \in B(0,R)$. 由于对任意 $\alpha_2 \leqslant \alpha < 1$, $X_p^\alpha \hookrightarrow X_p^{\alpha_2} \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, 且由引理 5.3.2(2) 得 $M = \sup_{t\geqslant 0} \|A(t)\|_{X_2^{1/2}} < +\infty$. 由式 (5.3.12)$\sim$ 式 (5.3.14),

$$
\begin{aligned}
&\|u(t)\|_{X_p^\alpha} \\
\leqslant\ & t^{\alpha_2-\alpha}\mathrm{e}^{-\omega t}\|u(0)\|_{X_p^{\alpha_2}} + \int_0^t \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}(t-s)^{-\alpha}\|f(u(s))\|_{X_p}\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & t^{\alpha_2-\alpha}\mathrm{e}^{-\omega t}\|u(0)\|_{X_p^{\alpha_2}} + C(M+M^3)\int_0^t \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}(t-s)^{-\alpha}\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & t^{\alpha_2-\alpha}\mathrm{e}^{-\omega t}\|u(0)\|_{X_p^{\alpha_2}} + C(M+M^3)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\omega s}s^{-\alpha}\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & t^{\alpha_2-\alpha}\mathrm{e}^{-\omega t}\|u(0)\|_{X_p^{\alpha_2}} + C(M+M^3)\frac{\Gamma(\alpha)}{\omega}, \qquad \forall t > 0.
\end{aligned} \tag{5.3.25}
$$

于是, 对于 $\alpha = \alpha_2$ 有

$$
\|u(t)\|_{X_p^{\alpha_2}} \leqslant \mathrm{e}^{-\omega t}\|u(0)\|_{X_p^{\alpha_2}} + C(M+M^3)\frac{\Gamma(\alpha_2)}{\omega}, \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{5.3.26}
$$

设 $t_1 = t_1(R) > 0$ 如同引理 5.3.2(2) 中一样, 使得 $K_2 = \sup_{t\geqslant t_1(R)} \|u(t)\|_{X_2^{1/2}} < +\infty$ 与

R 无关. 考虑 $u(t)$, 当 $t \geqslant t_1(R)$, 类似式 (5.3.26), 我们有

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{X_p^{\alpha_2}} &\leqslant \mathrm{e}^{-\omega(t-t_1)}\|u(t_1)\|_{X_p^{\alpha_2}} + \int_{t_1}^{t} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}(t-s)^{-\alpha}\|f(u(s))\|_{X_p}\mathrm{d}s \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\omega(t-t_1)}\|u(t_1)\|_{X_p^{\alpha_2}} + C(K_2+K_2^3)\frac{\Gamma(\alpha_2)}{\omega}, \qquad \forall t \geqslant t_1.\end{aligned}$$

取 $\bar{t}_1(R) > t_1(R)$ 使得 $\mathrm{e}^{-\omega(\bar{t}_1-t_1)}\|u(t_1)\|_{X_p^{\alpha_2}} \leqslant 1$, 则

$$\|u(t)\|_{X_p^{\alpha_2}} \leqslant 1 + C(K_2+K_2^3)\frac{\Gamma(\alpha_2)}{\omega} \triangleq \rho, \qquad \forall t \geqslant \bar{t}_1(R).$$

因此 $\mathcal{B} = B(0,\rho) \subset X_p^{\alpha_2}$ 是 $X_p^{\alpha_2}$ 的一个吸收集.

若 $u_0 \in X_p^{\alpha_1}$, 对任意 $\delta > 0, u(t) \in X_p^{\alpha_2}(t \geqslant \delta)$ 有界, 根据上面的分析, 如果取 $R = \|A(\delta)\|_{X_p^{\alpha_2}}$, 则对 $t \geqslant \bar{t}_1(R)+\delta$, $A(t) \in \mathcal{B} = B(0,\rho)$, 即 $\mathcal{B}$ 吸收 $X_p^{\alpha_1}$ 中的点.

(2) 设 $u_0 \in X_p^{\alpha_1}$, 于是对任意时间 $t_0 > 0$, $u(t)$ 进入并在 $X_p^{\alpha_2}$ 中保持有界. 令

$$M(t_0,\alpha_2) = \sup_{t\geqslant t_0}\|u(t)\|_{X_p^{\alpha_2}} < +\infty,$$

则对任意 $\alpha_2 < \alpha < 1$, 类似于式 (5.3.25)

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{X_p^{\alpha}} \quad &\leqslant (t-t_0)^{\alpha_2-\alpha}\mathrm{e}^{-\omega(t-t_0)}\|u(t_0)\|_{X_p^{\alpha_2}} \\ &\quad + C(M(t_0,\alpha_2)+M(t_0,\alpha_2)^3)\frac{\Gamma(\alpha)}{\omega}, \qquad t > t_0.\end{aligned}$$

于是, 当 $t \geqslant 2t_0, u(t)$ 在 X_p^{α} 中有界. 设

$$M(2t_0,\alpha) = \sup_{t\geqslant 2t_0}\|u(t)\|_{X_p^{\alpha}} < +\infty,$$

由式 (5.3.12)、式 (5.3.15), 以及

$$u(t) = \mathrm{e}^{-L_p(t-2t_0)}u(2t_0) + \int_{2t_0}^{t}\mathrm{e}^{-L_p(t-s)}f(u(s))\mathrm{d}s, \qquad t \geqslant 2t_0,$$

我们得

$$\begin{aligned}&\|L_p u(t)\|_{X_p} \\ &\leqslant (t-2t_0)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\omega(t-2t_0)}\|u(2t_0)\|_{X_p^{\alpha}} \\ &\quad + \int_{2t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}(t-s)^{\alpha_2-1}\|f(u(s))\|_{X^{\alpha_p^2}}\mathrm{d}s \\ &\leqslant (t-2t_0)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\omega(t-2t_0)}\|u(2t_0)\|_{X_p^{\alpha}} \\ &\quad + \int_{2t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}(t-s)^{\alpha_2-1}C((\|u(s)\|)_{X^{\alpha_p^2}} + \|u(s)\|_{X^{\alpha_p}}^3)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant (t-2t_0)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\omega(t-2t_0)}\|u(2t_0)\|_{X_p^\alpha}\\
&\quad +C(M(2t_0,\alpha)+M(2t_0,\alpha)^3)\int_{2t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}(t-s)^{\alpha_2-1}\mathrm{d}s\\
&\leqslant (t-2t_0)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\omega(t-2t_0)}\|u(2t_0)\|_{X_p^\alpha}\\
&\quad +C(M(2t_0,\alpha)+M(2t_0,\alpha)^3)\frac{\Gamma(\alpha)}{\omega},\qquad t>2t_0.
\end{aligned}
$$

因此对于 $t\geqslant 3t_0$, $\|L_pu(t)\|_{X_p}$ 是有界的. 因为 $t_0>0$ 任意, 我们有 $A(t)\in C_b([t_0,\infty);D(L_p))$ 对于 $t_0>0$ 成立, 由此我们了证明 (2).

(3) 设 $u_0\in B(0,R)\subset X_p^{\alpha_2}$. 因为 $\mathcal{B}$ 是吸收的, 存在一个 $\tilde{t}_1(R)>0$ 使得 $\|u(t)\|_{X_p^{\alpha_2}}\leqslant\rho$, $\forall t\geqslant\tilde{t}_1(R)$. 类似于式 (5.3.25), 当 $\alpha_2<\alpha<1$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{X_p^\alpha}&\leqslant (t-\tilde{t}_1)^{\alpha_2-\alpha}\mathrm{e}^{-\omega(t-\tilde{t}_1)}\|u(\tilde{t}_1)\|_{X_p^{\alpha_2}}\\
&\quad +\int_{\tilde{t}_1}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}(t-s)^{-\alpha}\|f(u(s))\|_{X_p}\mathrm{d}s\\
&\leqslant (t-\tilde{t}_1)^{\alpha_2-\alpha}\mathrm{e}^{-\omega(t-\tilde{t}_1)}\rho+C(\rho+\rho^3)\frac{\Gamma(\alpha)}{\omega},\qquad t>\tilde{t}_1.
\end{aligned}
$$

令 $\tilde{\tilde{t}}_1=\tilde{t}_1(R)+1, C_0\triangleq\rho+C(\rho+\rho^3)\dfrac{\Gamma(\alpha)}{\omega}$ 与 R 无关, 则

$$
\|u(t)\|_{X_p^\alpha}\leqslant C_0,\qquad t\geqslant\tilde{\tilde{t}}_1.
$$

从而得

$$
\begin{aligned}
\|L_pu(t)\|_{X_p}&\leqslant (t-\tilde{\tilde{t}}_1)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\omega(t-\tilde{\tilde{t}}_1)}\|u(\tilde{\tilde{t}}_1)\|_{X_p^{\alpha_2}}\\
&\quad +\int_{\tilde{\tilde{t}}_1}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}(t-s)^{-\alpha}\|f(u(s))\|_{X_p}\mathrm{d}s\\
&\leqslant (t-\tilde{\tilde{t}}_1)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\omega(t-\tilde{\tilde{t}}_1)}C_0+C(C_0+C_0^3)\frac{\Gamma(\alpha)}{\omega},\qquad t>\tilde{\tilde{t}}_1.
\end{aligned}
$$

令 $t_1(R)=\tilde{\tilde{t}}_1+1, C_1\triangleq C_0+C(C_0+C_0^3)\dfrac{\Gamma(\alpha)}{\omega}$ 与 R 无关, 则

$$
\|L_pu(t)\|_{X_p^\alpha}\leqslant C_1,\qquad t\geqslant t_1(R).
$$

由上面的推导, 我们可以找到 $t_j(R)>0$ 且 C_j 与 R 无关, 使得

$$
\|L_p^ju(t)\|_{X_p}\leqslant C_j,\qquad t\geqslant t_j(R).
$$

5.3.2 整体吸引子

由定理 5.3.2, 我们知道系统 (5.3.6)、(5.3.7) 在 $X_p^{\alpha_1}$ 和 $X_p^{\alpha_2}$ 上定义了一个连续半群 $S(t)$, $\alpha_1=2/(3p)$, $\alpha_2=\max\{1/2,1/p\}$, 它有一个有界集 $\mathcal{B}$ 吸收 $X_p^{\alpha_1}$ 和 $X_p^{\alpha_2}$ 的

有界子集的点. 进一步, 由定理 5.3.5 得, 对任意有界集 $B(0,R) \subset X_p^{\alpha_2}$, $\bigcup_{t\geqslant t_1} {}_{(R)}S(t)B$ 在 $D(L_p)$ 中有界, 即当 $t > t_1(R)$ 时, $S(t)$ 在 $X_p^{\alpha_2}$ 中上相对紧的. 因此有如下定理.

定理 5.3.6　设 $[H]$ 成立, $\alpha_1 = 2/(3p)$, $\alpha_2 = \max\{1/2, 1/p\}$, $S(t)$ 是由式 (5.3.6)、式 (5.3.7) 生成的半群, $\mathcal{B}$ 是 $S(t)$ 在 $X_p^{\alpha_2}$ 上的吸收集. 则 $\mathcal{B}$ 的 ω 极限集

$$\mathcal{A}_p = \bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s} S(t)\mathcal{B}} \tag{5.3.27}$$

是 $S(t)$ 在 $X_p^{\alpha_2}$ 上的整体吸引子. 如果我们在式 (5.3.27) 中取关于 $X_p^{\alpha_1}$ 的拓扑集的闭包

$$\tilde{\mathcal{A}}_p = \bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s} S(t)\mathcal{B}}^{X_p^{\alpha_1}},$$

则 $\tilde{\mathcal{A}}_p$ 是 $S(t)$ 在 X_p^{α} 上的整体吸引子.

定理 5.3.7　$\mathcal{A}_p = \tilde{\mathcal{A}}_p$ 与 p 无关, $1 < p < \infty$.

证明　$\mathcal{A}_p \subset \tilde{\mathcal{A}}_p$ 是显然的. 为证明 $\tilde{\mathcal{A}}_p \subset \mathcal{A}_p$, 设 $A \subset \tilde{\mathcal{A}}_p$. 于是由 $\tilde{\mathcal{A}}_p$ 的定义, 存在序列 $t_n \to \infty$ 和 $u_n \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B} \subset X_p^{\alpha_2}$ 是一个有界吸收集) 使得

$$S(t_n)u_n \to u, \qquad u \in X_p^{\alpha_1}.$$

既然 $u_n \in X_p^{\alpha_2}$ 有界, 由定理 5.3.5 中的 (3), $S(t_n)u_n$ 在 $D(L_p)$ 中有界, 且在 $X_p^{\alpha_2}$ 是相对紧的. 因此存在一个子序列 $S(t_{n_k})u_{n_k}$ 使得

$$S(t_{n_k})u_{n_k} \to \tilde{u} \ \in X_p^{\alpha_2} \subset X_p^{\alpha_1},$$

得到 $\tilde{u} = u$ 和 $S(t_{n_k})u_{n_k} \to A$ 在 $X_p^{\alpha_2}$ 中. 因此有 $u \in \mathcal{A}_p$ 和 $\tilde{\mathcal{A}}_p \subset \mathcal{A}_p$.

其次, 我们要证明 $\mathcal{A}_p$ 不依赖 p. 设 $u \in \mathcal{A}_p$, $p < q$, 则存在序列 $t_n \to \infty$ 和 $A_n \in \mathcal{B}_p$ ($\mathcal{B}_p \subset X_p^{\alpha_p}$ 对应于有界吸收集) 使得

$$S(t_n)u_n \to u \ \text{in} X_p^{\alpha_2}.$$

很明显有 $D(L_p^2) \hookrightarrow X_q^{\alpha_q}$, $S(t_n)u_n$ 在 $D(L_p^2)$ 有界且在 $X_q^{\alpha_q}$ 中相对紧. 因此 $S(t_n)u_n$ 的子序列的极限可以在 $X_q^{\alpha_q}$ 中取到, 且 $u \in \mathcal{A}_q$. 于是 $\mathcal{A}_p \subset \mathcal{A}_q$. 逆推导也类似.

5.4　广义 (+, +) 型 DS 方程的近似惯性流形

在这一节中, 我们继续讨论具周期边界条件的 DS 方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \chi u - \beta|u|^2 u + \gamma\varphi u, \qquad t > 0, (x,y) \in \Omega, \tag{5.4.1}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}(|u|^2). \tag{5.4.2}$$

$$u(0,x,y)=u_0(x,y), \qquad (x,y)\in\Omega, \tag{5.4.3}$$

其中, $\alpha=\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2;\beta=\beta_1+\mathrm{i}\beta_2;\gamma=\gamma_1+\mathrm{i}\gamma_2;\chi=\chi_1+\mathrm{i}\chi_2$ 是复值常数; $\Omega=(0,L)^2\subset\mathbf{R}^2$ 是有界正则区域. 为保证 φ 的唯一性, 要求 $\int_\Omega \varphi(t,x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

把 $-\Delta$ 视为 $W^{2,p}_{per}(\Omega)/R$ 到 $L^p(\Omega)$ $(1<p<\infty)$ 的一个同构, 其逆为 $(-\Delta)^{-1}$. 于是从式 (5.4.2) 和式 (5.4.3) 中可将 φ 用 u 表示出来, 代入式 (5.4.1) 得到一个非局部的非线性 Schrödinger 型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\chi u-\beta|u|^2u-\gamma uE(|u|^2), \qquad t>0,(x,y)\in\Omega, \tag{5.4.4}$$

$$u(t,x,y)=0, \qquad (x,y)\in\partial\Omega, \tag{5.4.5}$$

$$u(0,x,y)=u_0(x,y), \qquad (x,y)\in\Omega. \tag{5.4.6}$$

在上一节中已证明,DS 方程组 (5.4.1)~(5.4.2) 在参数满足

$$[H] \qquad \alpha_1>0, \quad \beta_1>0, \quad \beta_1+C(2)\gamma_1>0, \quad \chi_1>0$$

时, 其解半群在 $H^1(\Omega)$ 中具有紧致的整体吸引子, 其 Hausdorff 维数和分形维数均有限. 在这一节中, 通过式 (5.4.4)~ 式 (5.4.6) 研究问题 (5.4.1)~(5.4.3) 解的长时间性态, 我们将证明, 当参数满足条件 $[H]$ 时, DS 方程 (5.4.1)~(5.4.2) 的解有关于时间变量的解析性和关于空间的 Gevrey 正则性, 并由此构造近似惯性流形.

5.4.1 近似惯性流形

所谓近似惯性流形就是相空间中的一个有限维光滑流形, 每个解都在有限时间里进入到它的一个薄邻域.

(1) 代数式近似惯性流形

我们已知 DS 方程 (5.4.1)~(5.4.2) 整体解存在, 并且已证明了如下定理:

定理 5.4.1 设 $[H]$ 成立, 那么:

(i) 对 $p>3, u_0\in L^p(\Omega)$, DS 方程 (5.4.1)~(5.4.2) 有唯一解满足

$$u\in C(\mathbf{R}^+;L^p(\Omega))\cap\bigcap_{j,k\geqslant 1}C^j((0,\infty);D(A_p^k)),$$

存在常数 C_j (可依赖以于 $\|u_0\|_p$) 和 $t_j>0$, 使得 $\|A_p^j u(t)\|_p\leqslant C_j,\forall t\geqslant t_j$. $A_p=1-\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

(ii) 对 $u_0 \in V, \|u_0\|_V \leqslant R, u \in C(\mathbf{R}^+; V)$ 且存在 C_j 与 R 和 $t_j > 0$ 无关, 使得

$$\|A^j u(t)\| \leqslant C_j, \qquad \forall t \geqslant t_j.$$

该定理表明 DS 方程组在 $L^p(\Omega)$ 中是点耗散的. 还可以加强该结论, 证明在 $L^p(\Omega)$ 中还是有界耗散的.

定理 5.4.2　假设 [H] 成立, $p > 3, u_0 \in L^p(\Omega)$ 满足 $\|u_0\|_p \leqslant R, t_0 > 0$, 那么存在依赖于参数而与 R 和 t_0 无关的常数 $C_0 > 0$, 使得 $\|u\|_V \leqslant C_0, \forall t \geqslant t_0$. 其中,$V = H^1_{\text{per}}(\Omega)$.

证明　由定理 5.4.1(ii), 只要证明 $\forall \tau_0 > 0$, 存在依赖于 R, τ_0 和参数的 R_0, 使得

$$\|u(\tau_0)\|_V \leqslant R_0. \tag{5.4.7}$$

由定理 5.4.1(i),$\|u(t)\|_p$ 在 $t \in [0, \infty)$ 上连续, 存在 $T \in (0, 1]$, 使得 $\|u(t)\|_p \leqslant 2R, t \in [0, T]$, 有

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{e}^{-A_p(t-s)} f(u(s))\|_{X_p^{\frac{2}{3p}}} \\
\leqslant\ & \|\mathrm{e}^{-A_p(t-s)} f(u(s))\|_{L^{p/3}}^{1-\frac{8}{3p}} \|\mathrm{e}^{-A_p(t-s)} f(u(s))\|_{W^{2,p/3}}^{\frac{8}{3p}} \\
\leqslant\ & M(t-s)^{-\frac{8}{3p}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)} \|f(u(s))_{L^{p/3}} \\
\leqslant\ & CM(t-s)^{-\frac{8}{3p}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)} (\|u(s)\|_p + \|u(s)\|_p^3) \\
\leqslant\ & CM(t-s)^{-\frac{8}{3p}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)} (2R + (2R)^3), \qquad 0 \leqslant s < t \leqslant T.
\end{aligned}$$

可得到

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{X_p^{\frac{2}{3p}}} \leqslant & M t^{-\frac{2}{3p}} \mathrm{e}^{-\omega t} \|u_0\|_p \\
& + \int_0^t CM(R + R^3)(t-s)^{-\frac{8}{3p}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)} \mathrm{d}s \\
\leqslant & MRt^{-\frac{2}{3p}} + CM(R + R^3) \triangleq K(t), \qquad 0 < t < T.
\end{aligned}$$

特别地, 对任何给定的 $\tau_0 \in (0, T)$, 令 $\tau = \tau_0/2$, 则有 $\|u(t)\|_{X_p^{\frac{2}{3p}}} \leqslant K(\tau), \tau \leqslant t \leqslant T$. 因而, 视 τ 为初始时刻,$u(\tau)$ 为初始函数, 再次利用常数变易公式

$$u(t) = \mathrm{e}^{-A_p(t-\tau)} u(\tau) + \int_\tau^t \mathrm{e}^{-A_p(t-s)} f(u(s)) \mathrm{d}s, \qquad \tau \leqslant t \leqslant T,$$

$$X_p^{\frac{2}{3p}} \hookrightarrow L^{3p}(\Omega),$$

并注意到当 $0 \leqslant s < t \leqslant T$ 时,

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{e}^{-A_p(t-s)} f(u(s))\|_{W^{1,p}} & \leqslant M(t-s)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)} \|f(u(s))\|_{L^p} \\
& \leqslant M(t-s)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)} (\|u(s)\|_p + \|u(s)\|_{3p}^3) \\
& \leqslant CM(t-s)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)} (K(\tau) + K(\tau)^3),
\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{W^{1,p}} \leqslant & M(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\omega(t-\tau)}\|u(\tau)\|_p \\ & +CM(K(\tau)+K(\tau)^3)\int_\tau^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\omega(t-\tau)}\mathrm{d}s \\ \leqslant & MR(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}+CM(K(\tau)+K(\tau)^3)(t-\tau)^{\frac{1}{2}}, \\ & \tau<t\leqslant T.\end{aligned}$$

因而

$$\|u(t)\|_V \leqslant C\|u(t)\|_{W^{1,p}} \leqslant R_0 \triangleq MR\tau^{\frac{1}{2}}+CM(K(\tau)+K(\tau)^3)T^{\frac{1}{2}},$$

$$2\tau\leqslant t\leqslant T.$$

注意到 $\tau_0=2\tau$ 和 $\tau\leqslant 1$, 得到式 (5.4.7). 定理证毕.

令 $B_0=-\Delta$ 是定义在 $H=L^2(\Omega)$ 中的 Laplace 算子, 其定义域为 $D(B_0)=H^2_{per}(\Omega)$. 则 B_0 是自伴算子. B_0 的特征函数组成了 H 的标准正交基 $B_0w_j=\lambda_jw_j$, $j=1,2,\cdots$, $0=\lambda_1<\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_j\to\infty$ $(j\to\infty)$. 令 $P=P_m$ 为 H 到 $\mathrm{Span}\{w_1,\cdots,w_m\}$ 的正交投影,$Q=I-P$, 那么 $\forall\theta\geqslant 0$

$$\|B_0^{\theta+1/2}p\|^2\leqslant\lambda_m\|B_0^\theta p\|^2,\qquad p\in PD(B_0^{\theta+1/2}),\tag{5.4.8}$$

$$\|B_0^{\theta+1/2}q\|^2\leqslant\lambda_{m+1}\|B_0^\theta q\|^2,\qquad q\in QD(B_0^{\theta+1/2}),\tag{5.4.9}$$

若 $u(t)$ 是 DS 方程组的解, 则 $p(t)=Pu(t),q(t)=Qu(t)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+Ap+Pf(p+q)=0,\tag{5.4.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+Aq+Qf(p+q)=0.\tag{5.4.11}$$

由定理 5.4.1 和定理 5.4.2, 式 (5.4.8), 式 (5.4.9) 得到如下命题.

命题 5.4.3 设 $[H]$ 成立, $u_0\in L^p(\Omega),\|u_0\|_p\leqslant R,\delta=\lambda_2/\lambda_{m+1}$, 那么对任何 $j,k\in N$, 存在与 R 无关的常数 K_j,K_{jk} 和与 R 有关的常数 t_j,t_{jk}, 使得

$$\|q^{(j)}\|\leqslant K_j\delta,\qquad t\geqslant t_j,\tag{5.4.12}$$

$$\|A^jq(t)\|\leqslant K_j\delta,\qquad t\geqslant t_j,\tag{5.4.13}$$

$$\|A^kq^{(j)}(t)\|\leqslant K_{jk}\delta,\qquad t\geqslant t_{jk}\tag{5.4.14}$$

其中, $q^{(j)}$ 表示 q 对 t 的 j 次导数.

由此立即得到如下定理.

定理 5.4.4 设 $[H]$ 成立, $u_0\in L^p(\Omega),\|u_0\|_p\leqslant R$. 令 $\mathcal{M}_{\prime}=PV$ 是 H 的 m 维子空间, 那么对任何 $j\in N$, 存在充分大的 t_j, 当 $t>t_j$ 时, 从 u_0 出发的轨道与 $\mathcal{M}_{\prime}$

在 H 中的距离始终不超过 $K_j\delta^j$, 其中常数 K_j, t_j 依赖于 R, 即 $\mathcal{M}_f$ 是 m 维平坦近似惯性流形.

在式 (5.4.11) 可忽略 $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ 和 $f(p+q)$ 中的 q, 令 q_1 是 $Aq_1+Qf(p)=0$ 的解, 那么可以得到一个 C^∞ 映射 $\Phi: V\to QV$, 定义为 $q_1=\Phi(p)$. 记 $\mathcal{M}_\infty=\{p+\Phi(p)|p\in V\}$ 是 Φ 的图, 该图是一个 m 维的近似惯性流形.

定理 5.4.5 设 $[H]$ 成立, $u_0\in L^p(\Omega), \|u_0\|_p\leqslant R$. 对 $j\in\mathbf{N}$, 存在依赖于参数和 R 的充分大的 t_j, 当 $t\geqslant t_j$ 时, DS 方程组的从 u_0 出发的轨道将进入并一直停留在 $\mathcal{M}_\infty$ 关于 H 的 $K_j\delta^j$ 邻域内, 这里 K_j 依赖于参数但与 R 无关.

证明 设 $u(t)$ 是 DS 方程组的从 $u_0\in V$ 出发的轨道, $p(t)=Pu(t), q(t)=Qu(t)$, 令 $q_1=\Phi(p(t)), t>0$ 则 $\mathrm{dist}\ (u(t),\mathcal{M}_\infty)\leqslant\|q(t)-q_1(t)\|$, 注意 $A(q(t)-q_1(t))=Q(f(p+q)-f(p))+\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, 从式 (5.4.9), 式 (5.4.14) 有

$$\|A(q-q_1)\|\leqslant C\|q\|+\|\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\|\leqslant CK_j\delta^{j-1},$$

因而 $\|q-q_1\|\leqslant CK_j\delta^j$.

注 注意当 $m\to\infty$ 时, $\delta=\lambda_2/\lambda_{m+1}\to 0$, 从定理 5.4.2 和定理 5.4.4 发现平坦惯性流形 $\mathcal{M}_f$ 和非平坦惯性流形 $\mathcal{M}_\infty$ 有相同的代数精度, 这是因为半群 e^{-A_pt} 解析性和在 $D(A^j)$ 中有界吸收集的存在性 ($\forall j\in\mathbf{N}$).

(2) 时间解析性和 Gevrey 类正则性

把复数 $u=u_1+\mathrm{i}u_2$ 看成实向量 $u=(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2$, 令

$$B=-\begin{pmatrix} a_1 & -a_2\\ a_2 & a_1\end{pmatrix}\Delta,\qquad R(u)=\begin{pmatrix} R_1(u)\\ r_2(u)\end{pmatrix},$$

$$R_1(u)=\chi_1u_1-\chi_2u_2-(u_1^2+u_2^2)(\beta_1u_1-\beta_2u_2)-E(u_1^2+u_2^2)(\gamma_1u_1-\gamma_2u_2),$$

$$R_2(u)=\chi_1u_1+\chi_2u_2-(u_1^2+u_2^2)(\beta_1u_1+\beta_2u_2)-E(u_1^2+u_2^2)(\gamma_1u_1+\gamma_2u_2),$$

那么 DS 方程组可以表示成 $H\times H$ 中的抽象方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Bu=R(u). \tag{5.4.15}$$

显然

$$(Bu,u)=\alpha_1\|\nabla u\|^2=\alpha_1\|B_0^{\frac{1}{2}}u\|^2, \tag{5.4.16}$$

$$(Bu,Bu)=|\alpha|^2\|\Delta u\|^2=|\alpha|^2\|B_0u\|^2, \tag{5.4.17}$$

其中, $(\cdot,\cdot)$ 是 $H\times H$ 的对偶积, 注意到 $\|E(v)\|_p\leqslant C(p)\|v\|_p$, 有

$$\begin{aligned}(R(u),u)&=\chi_1\|u\|^2+\beta_1\|u\|_4^4+\gamma_1\int E(|u|^2)|u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\leqslant\chi_1\|u\|^2+(\beta_1+C(2)|\gamma_1|)\|u\|_4^4\leqslant C(\|u\|^2+\|u\|_V^4),\end{aligned} \tag{5.4.18}$$

$$\|R(u)\| \leqslant |\chi|\|u\| + |\beta|\|u\|_6^3 + |\gamma|\|E(|u|^2)\|_3\|u\|_6 \leqslant C(\|u\| + \|u\|_V^3). \tag{5.4.19}$$

定理 5.4.6 设 $[H]$ 成立 $u_0 \in L^p(p>3)$, 那么存在依赖于参数的 $T_1 = T_1(u_0) > 0$, 使得 DS 方程的解 $u(z)$ 的实部和虚部都在一个铅笔状区域

$$\Delta_1 = \{t + se^{i\theta} | t > 0, |\theta| \leqslant \pi/4, o \leqslant s \leqslant T_1\} \tag{5.4.20}$$

中是 $D(B)$ 值解析的. 如果 $u_0 \in V, \|u_0\|_V \leqslant R$, 则 $T_1 = T_1(R)$, 而且存在 $M > 0, t_1$ 和 $T_1 > 0$, 使得 $\|u(z)\|_{H^2} \leqslant M$, $\forall z \in \Delta_2 = \{t + se^{i\theta} | t > t_1, |\theta| \leqslant \pi/4, 0 \leqslant s \leqslant T_2\}$, 其中 M 仅依赖于参数而与 u_0 无关, t_1, T_2 依赖于参数和 $R(\|u_0\|_p) \leqslant R$.

证明 式 (5.4.15) 的复化方程为

$$\frac{du}{dt} + B(u) = R(u). \tag{5.4.21}$$

时间解析解的局部存在性可以由 Galerkin 方法得到. 为说明解整体存在, 可以采用 Promislow K (1991) 中的思想, 这里只需得到解的先验估计.

令 $u_0 \in V$. 式 (5.4.21) 与 $v = Bu + u$ 在 $H \times H$ 作内积, 有

$$\left(\frac{du}{dz}, Bu + u\right) + (Bu, Bu) + (Bu, u) = (R(u), Bu) + (R(u), u), \tag{5.4.22}$$

记 $z = se^{i\theta}$, 视 $\theta \in (-\pi/4, \pi/4)$ 为定数, 式 (5.4.24) 乘以 $e^{i\theta}$, 取实部, 利用式 (5.4.16)~式 (5.4.19) 得到

$$\frac{d}{ds}(\|u\|^2 + \alpha_1\|B_0^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \cos\theta(|\alpha|^2\|\Delta u\|^2 + \alpha^1\|B_0^{\frac{1}{2}}u\|^2) \leqslant C_2(\|u\|^2 + \|u\|_V^6). \tag{5.4.23}$$

令 $y(s) = 1 + \|u(se^{i\theta})\|^2 + \alpha_1\|B_0^{\frac{1}{2}}u(se^{i\theta})\|^2$, 则有 $y'(s) \leqslant C_2(y(s))^3$, 由此得到 $0 \leqslant y(s) \leqslant \sqrt{2}y(0)$, $0 < s < T_1 = \dfrac{1}{4C_3y^2(0)}$. 因而

$$\sup_{z\in\Delta_0} \|u(z)\|_V^2 \leqslant C(1 + \|u_0\|^2 + \|B_0^{\frac{1}{2}}u_0\|^2) \triangleq M_1^2,$$

其中, $\Delta_0 = \{z = se^{i\theta} | 0 \leqslant s \leqslant T_1, |\theta| \leqslant \pi/4\}$. 故 u 可以延拓为在一个包含 Δ_0 的区域上解析的解, 利用 Cauchy 公式, 得到

$$\|\frac{du(z)}{dz}\|_V \leqslant M_2,$$

$$z \in \tilde{\Delta}_0 = \{z = t_0 + se^{i\theta} | 0 \leqslant s \leqslant T_1', |\theta| \leqslant \pi/4\} \subset \Delta_0,$$

$$0 < T_1' < T_1 - t_0.$$

从式 (5.4.21) 推出 u 在 Δ_0 中是 $D(B)$ 值解析的.

由定理 5.4.1(ii) 和式 (5.4.23), u 在 Δ_1 中是 $D(B)$ 值解析的.

当 $u_0 \in L^p(\Omega)(p>3), \|u_0\|_p \leqslant R$, 由定理 5.4.2, 对任何 $\tau_0>0$, 存在一个依赖于 u_0 的 R_0, 使得 $\|u(\tau_0)\|_V \leqslant R_0$. 于是又归结到前面的情形, 只是把区域 Δ_1 修改为

$$\Delta_1' = \{z = t_0 + s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} | t > \tau_0, 0 \leqslant s \leqslant T_1, |\theta| \leqslant \pi/4\},$$

并注意到 $\tau_0>0$ 是任意小的. 定理的其余部分可以由 Cauchy 公式得到.

现在考虑 DS 方程组解 u 的 Gevrey 类正则性.

定理 5.4.7　设 $[H]$ 成立, $u_0 \in L^p(\Omega)(p>3), \|u_0\|_p \leqslant R$, 则存在依赖于参数和 u_0 的 $T_3>0$, 使得解 $u(t)$ 的每个分量在

$$\Delta_3 = \{z = t_s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} | t > 0, |\theta| \leqslant \pi/4, 0 \leqslant s \leqslant T_3\}$$

中延拓成 $D(B_0^{1/2}\mathrm{e}^{\phi(t)B_0^{1/2}})$ 值的解析函数, 其中 $\phi(t) = \min\{t, T_2\}$, 而且存在 $K, t_2, T_4, \sigma>0$, 使得 $\|\mathrm{e}^{\sigma B^{1/2}}Bu(z)\| \leqslant K$, $z \in \Delta_4 = \{z = t+s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} | t > t_2, |\theta| \leqslant \pi/4, 0 \leqslant s \leqslant T_4\}$, 其中 K 依赖于参数而与 u_0 无关, t_2, T_4, σ 依赖于参数和 R.

证明　证明思路与定理 5.4.6 相同, 这里只需得到先验估计. 令

$$j_k = (j_{k1}, j_{k2}) \in Z^2, \qquad k = 1,2,3,4,$$

$$\xi = (x,y) \in \Omega, \qquad j_k\xi = j_{k1}x + j_{k2}y,$$

$$B_0 = -\Delta, \qquad E_\sigma = \mathrm{e}^{\sigma B_0^{1/2}}, \quad \sigma > 0,$$

则 $u, u* = E_\sigma u$ 和 $|u|^2$ 可以表示成 $u = \sum\limits_{j_1\in\mathbf{Z}^2} u_{j_1}\mathrm{e}^{ij_1\xi}$, $u* = \sum\limits_{j_1\in\mathbf{Z}^2} u*_{j_1}\mathrm{e}^{ij_1\xi}$, 其中 $u*_{j_1} = \mathrm{e}^{\sigma|j_1|}u_{j_1}$, $|u|^2 = \sum\limits_{j_1,j_2\in\mathbf{Z}^2} u_{j_1}\bar{u}_{j_2}\mathrm{e}^{i(j_1-j_2)\xi}$, 有

$$\begin{aligned} E(|u|^2) &= (-\Delta)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial y^2}|u|^2 \\ &= \sum_{\substack{j_1,j_2\in\mathbf{Z}^2 \\ j_{12}\neq j_{22}}} \frac{(j_{12}-j_{22})^2}{(j_{11}-j_{22})^2+(j_{12}-j_{22})^2} u_{j_1}\bar{u}_{j_2}\mathrm{e}^{i(j_1-j_2)\xi}. \end{aligned} \tag{5.4.24}$$

对 $u \in D(E_{2\sigma}B_0)$,

$$\begin{aligned} &(|u|^2u, E_{2\sigma}B_0u) \\ &= \int_\Omega \sum_{j_1,\cdots,j_4\in\mathbf{Z}^2} u_{j_1}\bar{u}_{j_2}u_{j_3}\bar{u}_{j_4}\mathrm{e}^{i(j_1-j_2+j_3-j_4)\xi}|j_4|^2\mathrm{e}^{2\sigma|j_4|}\mathrm{d}\xi \\ &= (2\pi)^2 \sum_{j_1-j_2+j_3=k_4} u_{j_1}\bar{u}_{j_2}u_{j_3}\bar{u}_{j_4}|j_4|^2\mathrm{e}^{2\sigma|j_4|} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant (2\pi)^2 \sum_{j_1-j_2+j_3=j_4} |u_{j_1}^*||u_{j_2}^*||u_{j_3}^*||u_{j_4}^*||j_4|^2 \mathrm{e}^{\sigma(|j_4|-|j_1|-|j_2|-|j_3|)} \\
&\leqslant (2\pi)^2 \sum_{j_1-j_2+j_3=j_4} |u_{j_1}^*||u_{j_2}^*||u_{j_3}^*||u_{j_4}^*||j_4|^2,
\end{aligned}
$$

其中, 因为当 $j_4 = j_2 - j_2 + j_3$ 时, $\mathrm{e}^{\sigma(|j_4|-|j_1|-|j_2|-|j_3|)} \leqslant 1$. 记 $v = \sum_{j_k \in \mathbf{Z}^2}$, $v_{j_k} = |u_{j_k}^*|\mathrm{e}^{ij_k\xi}$, 那么

$$
\begin{aligned}
(|u|^2u, E_{2\sigma}B_0u\| &\leqslant \int_\Omega \sum_{j_1,\cdots,j_4\in\mathbf{Z}^2} v_{j_1}v_{j_2}v_{j_3}|j_4|^2 v_{j_4}\mathrm{d}\xi \\
&= \int_\Omega v^3 \sum_{j_4\in\mathbf{Z}^2} |j_4|^2 v_{j_4}\mathrm{d}\xi \\
&\leqslant \|v\|_6^3 \| \sum_{j_4\in\mathbf{Z}^2} |j_4|^2 v_{j_4}\| \leqslant C\|v\|_V^3 \|E_\sigma B_0 u\| \\
&\leqslant \varepsilon \|E_\sigma B_0 u\|^2 + C(\varepsilon)\|E_\sigma u\|_V^6, \qquad \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned}
\tag{5.4.25}
$$

同样, 由式 (5.4.24)

$$
\begin{aligned}
&(uE(|u|^2), E_{2\sigma}B_0u) \\
\leqslant\ & (2\pi)^2 \sum_{\substack{j_1,j_2\in\mathbf{Z}^2 \\ j_{12}\neq j_{22}}} \frac{(j_{12}-j_{22})^2}{(j_{11}-j_{22})^2+(j_{12}-j_{22})^2} |u_{j_1}^*||u_{j_2}^*||u_{j_3}||j_4|^2|u_{j_4}^*| \\
\leqslant\ & (2\pi)^2 \sum_{j_1-j_2+j_3=j_4} |u_{j_1}^*||u_{j_2}^*||u_{j_3}|u_{j_4}^*||j_4|^2 \\
\leqslant\ & \varepsilon\|E_\sigma B_0 u\|^2 + C(\varepsilon)\|E_\sigma u\|_V^6, \qquad \forall\varepsilon > 0.
\end{aligned}
\tag{5.4.26}
$$

余下部分与定理 5.4.6 相同.

由定理 5.4.7, 对任何 $u_0 \in L^p(\Omega), \|u_0\| \leqslant R$, 存在依赖于参数而不依赖于 R 的常数 $K > 0$ 和依赖于参数和 R 的常数 $\sigma > 0$ 和 $T_* > 0$, 使得 $\|\mathrm{e}^{\sigma B_0^{1/2}}u(t)\| \leqslant K$, $t > T_*$. 所以立即得到如下定理.

定理 5.4.8 设 $[H]$ 成立, $u_0 \in L^p(\Omega)(p > 3), \|u_0\| \leqslant R$. 令 $\mathcal{M}_0$ 和 $\mathcal{M}_1$ 分别是 DS 方程组的平坦和非平坦近似惯性流形, 那么 DS 方程组的从 u_0 发出的轨道都在 $t > T_*$ 以后进入并一直停留在 $\mathcal{M}_0$ 和 $\mathcal{M}_1$ 关于 H 的 $K\mathrm{e}^{-\sigma\delta}$ 邻域内, 其中常数 K, σ, T_* 与上面的相同.

该结果表明, 如果系统的线性主部算子能生成解析半群, 那么平坦和非平坦近似惯性流形具有相同的指数精度.

参 考 文 献

谷超豪, 胡和生, 周子翔. 1999. 孤立子理论中的达布变换及其几何应用. 上海: 上海科学技术出版社

戴正德, 郭柏灵. 2000. 惯性流形与近似惯性流形, 科学出版社

李用声, 郭柏灵, 林国广. 2000. Davey-Stewartson 方程组的近似惯性流形. 数学年刊, 21A(2): 217～224

Ablowitz M J, Segur H. 1981. Solitons and Inverse Scattering Transform. Philadelphia, PA: SIAM

Ablowitz M J, Fokas A S. 1984. On the inverse scattering transform of multidimensional nonlinear equations related to first-order systems in the plane. J. Math. Phys. 25, 2494～2505

Ablowitz M J, Haberman R. 1975. Nonlinear evolution equations in two and three dimensions. Phys. Rev. Lett. 35, 1185～1188

Ablowitz M J, Segur H. 1979. On the evolution of packets of water waves. J. Fluid Mech. 92. 691～715

Aijun Zhu,Zhengde Dai. 2007. Homoclinic degeneracy for perturbed nonlinear Schrödinger equation. Phys. Lett. A 363, 102～107

Anker D, Freeman N C. 1978. On the soliton solutions of the Davey-Stewartson equation for long waves. Proc. R. Soc. A 360, 529～540

Arkadiev V A, Pogrebkov A K, Polivanov M C. 1989. Inverse scattering transform method and solitons for Davey-Stewartson II equation. Physica D 36, 189

Babin S V, Vishik M I. 1998. Attractors of Evolution Equations. Amstredam, London, New York, Tokyo, North-Holland

Beals R, Coifman R R. 1988. The Spectral Probem for the Savey-Stewartson and Ishimori Hierarchies. Preprint Yale University

Benney D J, Newell A C. 1967. The propagation of nonlinear wave envelopes. J. Math. Phy. 46, 133～139

Benney D J, Roskes G J. 1969. Wave instabilities Stud. Appl. Math. 48, 377～385

Bergh J, Lofstrom J. 1976. Interpolation spaces. An introduction. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223, Springer-Verlag, Berlin-New York

Boiti M, Konopelohenko B O,Pempinelli F. 1985. Inverse Prob. 2;33

Boiti M, P Leon J J, Martina L, Pempinelli F. 1988. Phys. Lett. A, 132;432

Boiti M, P Leon J J, Pempinelli F. 1986,1987. Inverse Prob. 2;271,3;25

Boiti M, P Leon J J, Pempinelli F. 1989. A new spectral transformation for the Davey-Stewartson I equation. Phys. Lett.A 141;101

Brezis H, Gallouet T. 1980. Nonlinear Schrodinger evolution equations. Nonlinear Analysis TMA, 4: 677～681

Cao C W. 1989. Non-linearization of Lax equations of AKNS system. Sci. in China A, 701

Cazenave T, Weissler F B. 1989. Some Remarks on the Nonlinear Schrödinger Equation in the Critical Case, Lect. Notes in Math., 1394, 18～29

Cazenave T. 1989. An Introduction to Nonlinear Schrödinger Equations. Textos de Métodos Mathemáticos, 22

Cazenave T, Weissler F B. 1990. Rapidly decaying solutions of the nonlinear Schrodinger equation.Preprint, ENS Cachan

Cazenave T, Weissler F B. 1992. The Structure of the Solutions to Pseudo-Conformally Invariant Nonlinear Schrodinger Equation. Proc. R. Soc. Edinb (In the press)

Cazenave T. 1989. Nonlinear Schrodinger equations. Texos de Metodos Matematicos, 22. Rio de Janeiro: Institudo de Matematica

Cazenzve T, Weissler F B. 1990. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrodinger equation in H^s. Nonlinear Anal. 14, 807~836

Cheng Y. 1992. Constaint of integrable systems:from higher to lower dimensions. PHys. Lett., A, 166:217

Chow K W. 1995. Solitary waves on a continuous wave background. J. Phys. Soc. Jpn. 64;1524

Chow K W. 1996. Solitoff solutions of nonlinear evolution equations. J. Phys. Soc. Jpn. 65;1971

Chow K W. 2002. A class of doubly periodic waves for nonlinear evolution equations. Wave Motion 35;71

Cipolatti R. 1992. On the existence of standing waves for a Davey-Stewartson system. Comm. P.D.E, 17:967~988

Cipolatti R. 1993. On the instability of ground states for a Davey-Stewartson systems. Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. 58, no. 1, 85~104

Coifman R R, Meyer. 1973. Au dela des operators pseudodifferentials. Asterisque 57, Societe Mathematique de France

Coifman R R, Meyer. 1986. Nonlinear Harmonic Analysis, Operator Theory and P.D.E., Beijing Lectures in Harmonic Analysis, Princeton University Press., 3~45

Constantin P, Saut J C. 1988. Local smoothing properties of dispersive equations J. Am. Math. Soc. 1, 413~439

Constantin P, Foias C, Temam R. 1985. Attractors representing turbulent flows, Memoris of AMS, 53, 314

Cornille H. 1979. Solutions of the generalized nonlinear Schrodinger equation in two spatial dimensions. J. Math. Phys. 20, 199~209

Dai Zhengde, Huang Jian. 2005. Homoclinic tubes for the Davey-Stewartson II equation with periodic boundary conditions Chin. J. Phys. 43(2), 349~356

Davey A, Hocking L M , Stewartson K. 1974. On the nonlinear evolution of three dimensional disturbances in plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 63(3), 529~536

Davey A, Stewarson K. 1974. On three-dimensional packets of surface waves. Proc. R. Sco. London. Ser. A 338, 101~110

Djordejevic V V, Redekopp L G. 1977. On two-dimensional packets of capillary-gravity waves. J. Fluid Mech. 79, 703~714

Djordjevic V D, Redekopp L G. 1977. On two-dimensional packets of capillary-gravity waves. J. Fluid Mech. 79, 703~714

Fokas A S, Santini P M. 1988. Recursion operators and bi-Hamiltonian structures in multidimensions I,II Commun. Math. Phys. 115, 375~419, 116, 449~474

Fokas A S, Santini P M. Solitons in multidimensions Preprint INS 106, Postdam

FOKAS A S, Santini P M. 1989. Coherent Structures in Multidimentions. Phys. Rev. Letters, 63, 1329~1333

Fokas A S, Santini P M. 1988. Recursion operators and bi-Hamiltonian structures in multidimensions I, II. Communs math. Phys. 115, 375~419;116, 449~474

Folland G B. 1983. Lectures on partial differential equations. Tata Institute. Berlin: Springer

Ghidaglia J M, Saut J C. 1990. On the initial value problem for the davey-stewartson system. Nonlinearity, 3: 475~506

Ghidaglia J M, Saut J C. 1989. Sur le probleme de Cauchy pour les equations. de Davey-Stewartson C. R. Acad. Sci. Paris Ser I 308, 115~120

Ghidaglia J M, Saut J C. 1990. Nonelliptic Schrödinger evolution equations. to be published

Gilson C R. 1992. Resonant behavior in the Davey-Stewartson equation. Phys. Lett.A 161;423

Ginibre J, Velo G. 1978. On a class of nonlinear Schrödinger equations Parts I,II J. Funct Anal., 32: 1~32, 33~71; Part III Ann. Inst. Henri Poincare, A 28: 287~316; 1985 The global Cauchy *problem for the nonlinear Schrödinger equation revisiten* Ann. Inst. H Poincare, Anal. Non Lineaire, 2: 309~312

Ginibre J, Velo G . 1985. Scattering Theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations. J. Math. Pure Appl., 64: 363~401

Ginibre J, Velo G. 1982. Sur une equation de Schrodinger nonlineaire avec interaction non lacale. In Nonlinear partial differential equations and their applications. College de France Seminar, II: 115~199. Research Notes in Mathematics, London: Pitman, 60

Ginibre J, Velo G. 1985. The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation. Math. Z., 189 (4): 487~505

Glassey R T. 1977. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonloinear Schrodingerequations. J. Math. Phy, 18: 1794~1797

Grimshaw R H J. 1977. The modulation of an internal gravity-wave packet and the resonance with *the mean motion* Stud. Appl. Math., 56: 241~266

Gu C H. 1992. Darboux transformations for a class of integrable systems in n variables. Analyse, Varietes et Physique, Proc. of Colloque International en 1'honneur d' Yvonne Choquet-Bruhat, Kluwer

Gu C H. 1992. On the interaction of solitons for a class of integrable systems in the space-time $\mathbf{R}^{n+1}$. Lett. Math. Phys., 26:199

Guckenheimer J, Holmes P. 1983. Nonlinear Oscilliations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Applied Mathematical Sciences, 42, New York: Springer

Guo B, Li Y. 1996. Long time behavior of solutions of Davey - Stewartson equations, IAPCM report

Guo B, Wang B. On existence and scattering for nonlinear Schrodinger equations. Preprint

Guo B, Wang B. 1999. The Cauchy problem for Davey-Stewartson equations,Comm.Pure and Appl.Math.LII: 1477~1490

Guo C H,Zhou Z X. 1994. On Darboux *transformations for soliton equations in high dimensional* space-time, Lett. Math. Phys., 32:1

Hayashi N, Nakamitsu K, Tsutsumi M. 1987. On solutions to the initial value problem for the nonlinear Schrodinger equations J. Funct. Anal., 71: 218~245

Hayashi N, Hirata H. 1996. Global existence and asymptotic behavior in time of small solutions to the elliptic-hyperbolic Davey-Stewartson systems. Nonlinearity, 9: 1387~1409

Hayashi N. 1996. Local existence in time of small solutions to the Davey-Stewartson systems. Ann. Inst. Henri Poincare Phys. Theor, 65: 313~366

Hayashi N, Saut J C. 1995. Global existence of small solutions to the Davey-Stewartson and the Ishimori systems. Diff. Integ. Eqns., 8: 1657～1675

Hayashi N, Ozawa T. 1988. Scattering theory in the weighted $L^2(\mathbf{R}^n)$ spaces for some Schrödinger equations. Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Theor, 48: 17～37

Herbst I W. 1977. Spectral theory of the operator $(p^2+m_2)^{1/2}-Ze^2/r$. Communs math. Phys., 53: 285～294

Hietarinta J, Hirota R. 1990. Multidromion solutions to the Davey-Stewartson equation. Phys. Lett., 145:237

Hirota R. 1973. Exact envelope soliton solutions of a nonlinear wave equation, J. Math. Phys., 14:805

Huang Jian, Dai Zhengde. 2005. Exponential attractor for Davey-Stewartson equation in Banach space, J. Math.& Expo., 25:3, 391～398

Jian Huang, Zhengde Dai. Homoclinic Solutions for Davey-Stewartson equation. Chaos Solitons & Fractals. in press

Kalyakin L A, Shakir'yanov M M. 1996. Correctness of Goursat-Cauchy problem for the system of equations of the Davey-Stewartson-type. Dokl. Akad. Nauk, 346: 445～447

Kato T. 1987. On nonlinear Schrodinger equations Ann. Inst. H Poincaré, Physique Theorique, 46: 113～129

Kato T. 1983. On the Cauchy Problem for the (Generalized)Korteweg-de Vries Equation, Advances in Mathematics Supplementary Studies, Studies in Appl. Math., 8: 891～907

Kato T, Ponce G. 1988. Commutator Estimates and the Euler and Navier-Stokes equations. Comm. Pure Appl. Math., 41: 891～907

Kenig C E, Ponce G, Vega L.1991. Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations. Indiana Univ. Math. J. 40: 33～69

Kenig C E, Ponce G, Vega L.1993. Small solutions to nonlinear Schrödinger equations. Ann. Inst. Henri Poincaré. Analyse non linéare, 10:255～288

Lawden D F. 1989. Elliptic Functions and Applications. New York: Springer

Li Y. 2000. Bäcklund-Darboux transformations and Melnikov analysis for Davey-Stewartson II equations. J.Non. Sci, 10, 103～131

Li Y, Mclaughlin D W. 1993. Homoclinic orbits and Bäcklund transformations for the doubly periodic Davey-Stewartson equations. Nonlinear Processes in Physics. 122～125

Li Y, Guo B , Jiang M. 2000. Existence and blow-up of solutions to degenerate Davey-Stewartson equations. J.Math.Phys,41: 2943～2956

Linares F, Ponce G. 1993. On the Davey - Stewartson systems. Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non linéaire, 10: 523～548

Lions J L. 1969. Quelques methodes de resolution des problems aux limites non lineaires. Paris: Dunod

Ma Y C. 1978. The complete solution of the long-wave-short-wave resonance equations. Stud. App. Math., 59: 201～21

Macci A. 1997. Universal and integrable nonlinear evolution systems of equations in 2+1dimensions. J. Math. Phys., 38: 4151～4164

Matsuno Y. 1984. Bilinear Transformation Methods, New York: Academic Press

Matveev V B, Salle M A. 1991. Darboux Transformations and Solitons. Springer-Verlag

Merle F, Tsutsumi Y. 1990. L^2 concentration of blow up solutions for the nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity. J. Diff.Equats, 84: 205～214

Morris H C. 1977. Prolongation structures and nonlinear evolution equations in two partial dimensions. II. A generalized nonlinear Schrödinger equation. J. Math. Phys., 18: 285～88

Nawa H, Tsutsumi M. 1989. On blow-up for the pseudo-conformally invariant nonlinear Schrödinger equation. Funkcialaj Ekvac., 32:417～428

Novikov S et al. 1984. Theory of solitons, the inverse scattering method

Ohta M. 1994. Stability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson systems. J. Dyn. Diff. Eqns, 6: 325～334

Ohta M. 1995. Instability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson systems. Ann. Inst. Henri Poincaré Phys. Theor, 62: 69～80

Ohta M. 1995. On the instability of ground states for the generalized Davey- Stewartson system. Ann. Inst. H. Poincare Phys.Theor. 62:69

Oikawa M, Chow K, Benney D J. 1987. The propagation of nonlinear wave packets in a shear flow with a free surface. Stud. Appl. Math., 76: 69～92

Pazy A. 1983. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,Berlin: Springer Verlag

Satsuma J, Ablowitz M J. 1979. Two-dimensional lumps in nonlinear dispersive system. J. Math. Phys., 20:1496

Segal I. 1963. Nonlinear semigroups. Ann. Math., 78: 339～364

Stein E M. 1970. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton: Princeton University Press

Strichartz R. 1977. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. Duke Math. J, 44: 705～714

Tajiri M, Arai T. 2000. Periodic soliton solutions to the Davey-Stewartson equation.Proc. of Institute of NAS of Ukraine, 30:210

Temam R. 1988. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer Verlag

Tsutsumi M. 1994. Decay of weak solutions to the Davey-Stewartson systems. J. Math. Anal. Appl., 182: 680～704

Tsutsumi M. 1984. Nonexistence of global solutions to the Cauchy problem for the damped nonlinear Schrödinger equation. SIAM J. Math. Analysis, 15:357～366

Ward R S. 1985. Integrable and solvable systems,and relation among them. Phil. Trans. R. Soc. London, A (315):451

Watanabe Y, Tajiri M. 1998. Periodic soliton resonance:solutions to the Davey-Stewartson I equation. J. Phy. Soc. Jpn.,67:705

Weinstein M. 1986. On the structure and formation of singularities in solutions to nonlinear dispersive evolution equations. Commun. Partial Diffl. Equats, 11: 545～565

Yuen H C, Lake B M. 1980. Instabilities of waves on deep water. Ann. Rev. Fluid Mech., 12: 303～334

Zakharov V E. 1980. The inverse scattering method in solitons, Heidelberg: Spinger. 17:243～285

Zakharov V E, Shabat A B. 1973. Soviet Phys. J.E.T.P., 37(5): 823～828

Zakharov V E, Shabat A B. 1974. Funct. Analysis Applica, 8: 226～235

Zhakarov Y E, Shabat A B. 1972. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. Sov. Phys.-JETP, 34:67~69

Zhengde Dai et al. 2005. Homoclinic orbits and periodic solitons for Boussinesq equation with even constraint. Chaos Solitons and Fractals,26:1189~1194

Zhengde Dai et al. 2006. Explicit homoclinic tube solutions and chaos for Zakharov system with periodic boundary. Phys. Lett., A352: 411~415

Zhengde Dai et al. Singular periodic soliton solutions and resonance for the Kadomtsev- Petviashvili equation. Chaos,Solitons & Fractals (in press)

Zhengde Dai,Aijun Zhu,Shaolin Li. 2007. Heteroclinic tubes for Davey-Stewartson I equation with periodic boundary, Chin. J. Phys 45 (1): 62~71

Zhengde Dai,Murong Jiang,Qingyun Dai, Shaolin Li. 2006. Homoclinic bifurcation for Boussinesq equation with even constraint, Chin. Phy. Lett., 23(5) 1065~1067

Zhou Y, Wang M, Miao T. 2004. The periodic wave solutions and solitary wave solutions for a class of nonlinear partial differential equations. Phys. Lett. A, 323:77

Zhou Z X. 1988. On the Darboux tranformation for 1+2 dimensional equations. Lett. Math. Phys.,16:9

Zhou Z X. 1990. Determination of nondegenerate Darboux operators of first order in 1+2 dimensions. Nonlinear Physics, Springer-Verlag: 23

Zhou Z X. 1992. Explicit solutions of N-wave equation in 1+2 dimensions. Phys. Lett., A 168:370

Zhou Z X. 1993. A method to obtain explicit solutions of 1+2 dimensional AKNS system. Int. J. Mod. Phys., 3A:565

Zhou Z X. 1996. Soliton solutions for some equations in 1+2 dimensional hyperbolic su(N) AKNS system.Invers Problems,12:89

Zhou Z X. 1998. Localized solitons of hyperbolic su(N) AKNS system.Inverse Problems, 14:1371

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1 数理逻辑基础（上册） 1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论（上册） 1981.10 柯召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础（下册） 1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 群构造（上册） 1982.11 张远达 著
9 有限群构造（下册） 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论（上册） 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论（上册） 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论（下册） 1987.12 柯召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著

29 同调代数 1988.2 周伯壎 著
30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋等 编著
32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青、段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜、陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝等 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行等 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞等 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉、冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙、吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇、张学莲 著
41 线性偏微分算子引论（下册） 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录等 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰等 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲、马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬、赵晓华、刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英、李冲、杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先、霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松等 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜等 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著

63　调和分析及其在偏微分方程中的应用　1999.10　苗长兴　著
64　惯性流形与近似惯性流形　2000.1　戴正德、郭柏灵　著
65　数学规划导论　2000.6　徐增堃　著
66　拓扑空间中的反例　2000.6　汪林、杨富春　编著
67　拓扑空间论　2000.7　高国士　著
68　非经典数理逻辑与近似推理　2000.9　王国俊　著
69　序半群引论　2001.1　谢祥云　著
70　动力系统的定性与分支理论　2001.2　罗定军、张祥、董梅芳　编著
71　随机分析学基础（第二版）　2001.3　黄志远　著
72　非线性动力系统分析引论　2001.9　盛昭瀚、马军海　著
73　高斯过程的样本轨道性质　2001.11　林正炎、陆传荣、张立新　著
74　数组合地图论　2001.11　刘彦佩　著
75　光滑映射的奇点理论　2002.1　李养成　著
76　动力系统的周期解与分支理论　2002.4　韩茂安　著
77　神经动力学模型方法和应用　2002.4　阮炯、顾凡及、蔡志杰　编著
78　同调论——代数拓扑之一　2002.7　沈信耀　著
79　金兹堡-朗道方程　2002.8　郭柏灵等　著
80　排队论基础　2002.10　孙荣恒、李建平　著
81　算子代数上线性映射引论　2002.12　侯晋川、崔建莲　著
82　微分方法中的变分方法　2003.2　陆文端　著
83　周期小波及其应用　2003.3　彭思龙、李登峰、谌秋辉　著
84　集值分析　2003.8　李雷、吴从炘　著
85　数理逻辑引论与归结原理　2003.8　王国俊　著
86　强偏差定理与分析方法　2003.8　刘文　著
87　椭圆与抛物型方程引论　2003.9　伍卓群、尹景学、王春朋　著
88　有限典型群子空间轨道生成的格（第二版）　2003.10　万哲先、霍元极　著
89　调和分析及其在偏微分方程中的应用（第二版）　2004.3　苗长兴　著
90　稳定性和单纯性理论　2004.6　史念东　著
91　发展方程数值计算方法　2004.6　黄明游　编著
92　传染病动力学的数学建模与研究　2004.8　马知恩、周义仓、王稳地、靳 祯　著
93　模李超代数　2004.9　张永正、刘文德　著
94　巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用　2005.1　王玉文　著
95　巴拿赫空间结构和算子理想　2005.3　钟怀杰　著
96　脉冲微分系统引论　2005.3　傅希林、闫宝强、刘衍胜　著

97 代数学中的Frobenius结构 2005.7 汪明义 著
98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
104 凝固过程动力学与交界面稳定性引论 2006.12 徐鉴君 著
105 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理 裴定一 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.4 马天 汪宁宏 著
107 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著
108 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著
109 矩阵的半张量积:理论与应用 2007.5 程代展 齐洪胜 著
110 鞅与Banach空间几何学 2007.5 刘培德 著
111 非线性常微分方程边值问题 2007.6 葛渭高 著
112 戴维-斯特瓦尔松方程 2007.5 戴正德 蒋慕蓉 李栋龙 著
113 广义哈密顿系统理论及其应用 2007.7 李继彬 赵晓华 刘正荣 著